



INSO

19608

1st.Edition

2015

جمهوری اسلامی ایران
Islamic Republic of Iran

سازمان ملی استاندارد ایران

Iranian National Standardization Organization



استاندارد ملی ایران

۱۹۶۰۸

چاپ اول

۱۳۹۳

تصمیم‌گیری در مورد مشاهده‌های
دورافتاده - آبین کار

Standard practice for
dealing with outlying observations

ICS:03.120.30

به نام خدا

آشنایی با سازمان ملی استاندارد ایران

مؤسسه‌ی استاندارد و تحقیقات صنعتی ایران به موجب بند یک ماده‌ی ۳ قانون اصلاح قوانین و مقررات مؤسسه‌ی استاندارد و تحقیقات صنعتی ایران، مصوب بهمن ماه ۱۳۷۱ تنها مرجع رسمی کشور است که وظیفه تعیین، تدوین و نشر استانداردهای ملی (رسمی) ایران را به عهده دارد.

نام موسسه‌ی استاندارد و تحقیقات صنعتی ایران به موجب یکصد و پنجاه و دومین جلسه شورای عالی اداری مورخ ۹۰/۶/۲۹ به سازمان ملی استاندارد ایران تغییر و طی نامه شماره ۲۰۶/۳۵۸۳۸ مورخ ۹۰/۷/۲۴ جهت اجرا ابلاغ شده است.

تدوین استاندارد در حوزه‌های مختلف در کمیسیون‌های فنی مرکب از کارشناسان سازمان، صاحب نظران مراکز و مؤسسات علمی، پژوهشی، تولیدی و اقتصادی آگاه و مرتبط انجام می‌شود و کوششی همگام با مصالح ملی و با توجه به شرایط تولیدی، فناوری و تجاری است که از مشارکت آگاهانه و منصفانه صاحبان حق و نفع، شامل تولیدکنندگان، مصرفکنندگان، صادرکنندگان و واردکنندگان، مراکز علمی و تخصصی، نهادها، سازمان‌های دولتی و غیر دولتی حاصل می‌شود پیش‌نویس استانداردهای ملی ایران برای نظرخواهی به مراجع ذی نفع و اعضای کمیسیون‌های فنی مربوط ارسال می‌شود و پس از دریافت نظرها و پیشنهادها در کمیته‌ی ملی مرتبط با آن رشته طرح و در صورت تصویب به عنوان استاندارد ملی (رسمی) ایران چاپ و منتشر می‌شود.

پیش‌نویس استانداردهایی که مؤسسات و سازمان‌های علاقه‌مند و ذی صلاح نیز با رعایت ضوابط تعیین شده تهیه می‌کنند، در کمیته‌ی ملی طرح و بررسی و در صورت تصویب، به عنوان استاندارد ملی ایران چاپ و منتشر می‌شود. بدین ترتیب، استانداردهای ملی تلقی می‌شوند که بر اساس مفاد نوشته شده در استاندارد ملی ایران شماره‌ی ۵ تدوین و در کمیته‌ی ملی استاندارد مربوط که سازمان ملی استاندارد ایران تشکیل می‌دهد به تصویب رسیده باشد.

سازمان ملی استاندارد ایران از اعضای اصلی سازمان بین‌المللی استاندارد (ISO)^۱، کمیسیون بین‌المللی الکترونیک (IEC)^۲ و سازمان بین‌المللی اندازه‌شناسی قانونی (OIML)^۳ است و به عنوان تنها رابط^۴ کمیسیون کدکس غذایی (CAC)^۵ در کشور فعالیت می‌کند. در تدوین استانداردهای ملی ایران ضمن توجه به شرایط کلی و نیازمندی‌های خاص کشور، از آخرین پیشرفت‌های علمی، فنی و صنعتی جهان و استانداردهای بین‌المللی بهره‌گیری می‌شود.

سازمان ملی استاندارد ایران می‌تواند با رعایت موازین پیش‌بینی شده در قانون، برای حمایت از مصرفکنندگان، حفظ سلامت و ایمنی فردی و عمومی، حصول اطمینان از کیفیت محصولات و ملاحظات زیست محیطی و اقتصادی، اجرای بعضی از استانداردهای ملی ایران را برای محصولات تولیدی داخل کشور و یا اقلام وارداتی، با تصویب شورای عالی استاندارد، اجباری نماید. سازمان می‌تواند به منظور حفظ بازارهای بین‌المللی برای محصولات کشور، اجرای استاندارد کالاهای صادراتی و درجه‌بندی آن را اجباری نماید. همچنین برای اطمینان بخشیدن به استفاده کنندگان از خدمات سازمان‌ها و مؤسسات فعال در زمینه مشاوره، آموزش، بازرگانی، ممیزی و صدور گواهی سیستم‌های مدیریت کیفیت و مدیریت زیست محیطی، آزمایشگاه‌ها و مراکز کالیبراسیون (واسنجی) وسایل سنجش، سازمان ملی استاندارد ایران این گونه سازمان‌ها و مؤسسات را بر اساس ضوابط نظام تأیید صلاحیت ایران ارزیابی می‌کند و در صورت احراز شرایط لازم، گواهینامه تأیید صلاحیت به آن‌ها اعطا و بر عملکرد آن‌ها ناظرت می‌کند. ترویج دستگاه بین‌المللی یکاه، کالیبراسیون (واسنجی) وسایل سنجش، تعیین عیار فلزات گران‌بها و انجام تحقیقات کاربردی برای ارتقای سطح استانداردهای ملی ایران از دیگر وظایف این سازمان است.

1- International Organization for Standardization

2- International Electrotechnical Commission

3- International Organization of Legal Metrology (Organisation Internationale de Métrologie Legale)

4- Contact point

5- Codex Alimentarius Commission

کمیسیون فنی تدوین استاندارد
"تصمیم‌گیری در مورد مشاهده‌های دورافتاده-آبین کار"

سمت و. یا نمایندگی

عضو هیئت‌علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد
شهرضا

رئیس :

میرمحمدی، مهره سادات
(دکتری شیمی تجزیه)

رئیس هیئت مدیره شرکت معیار دانش
پارس

دبیر :

نبی، مهدی
(کارشناسی ارشد شیمی تجزیه)

اعضاء : (اسامی به ترتیب حروف الفبا)

مدیرعامل شرکت معیار دانش پارس

اسماعیلیان، سید امین
(کارشناسی ارشد مهندسی صنایع)

کارشناس شرکت معیار دانش پارس

بقالیان نژاد، رضا
(کارشناسی ارشد شیمی تجزیه)

سازمان ملی استاندارد ایران

پوری رحیم، حسین
(کارشناسی ارشد متالورژی)

مسئول فنی شرکت گلتاش

تابش، پریسا
(کارشناسی شیمی)

شرکت برقا باطنی

تأخیری، محسن
(کارشناسی صنایع)

شرکت آریا کیفیت پارس

جلالی، ایزد
(کارشناسی ارشد صنایع)

کارشناس شرکت معیار دانش پارس

حامدیان، مولود
(کارشناسی ارشد شیمی تجزیه)

رئیس فناوری اطلاعات و ارتباطات اداره کل
استاندارد استان اصفهان

دیانی، فربا
(کارشناسی مهندسی صنایع)

مدیر کیفیت آزمایشگاهی

دیهیم نیا، بابک
(کارشناسی ارشد شیمی)

کارشناس شرکت معیار دانش پارس

میرمحمدی، رویالسادات
(کارشناسی ارشد صنایع غذایی)

کارشناس شرکت معیار دانش پارس

یزدانی، الهام
(کارشناسی ارشد شیمی تجزیه)

فهرست مندرجات

صفحه	عنوان
ب	آشنایی با سازمان ملی استاندارد
ج	کمیسیون فنی تدوین استاندارد
۵	پیش گفتار
۶	مقدمه
۱	۱ هدف و دامنه کاربرد
۲	۲ مراجع الزامی
۲	۳ اصطلاحات و تعاریف
۲	۴ اهمیت و کاربرد
۳	۵ اساس ضوابط آماری برای داده‌های دورافتاده
۴	۶ ضوابط توصیه شده برای نمونه‌های منفرد
۳۳	۷ روابط آماری توصیه شده با استفاده از انحراف استاندارد مستقل
۳۹	۸ معیارهای توصیه شده برای انحراف استاندارد معلوم
۴۲	۹ توضیحات تکمیلی

پیش‌گفتار

استاندارد "تصمیم‌گیری در مورد مشاهده‌های دورافتاده-آیین کار" که پیش‌نویس آن در کمیسیون‌های مربوط توسط آقای مهدی نبی تهیه و تدوین شده است و در یکصد و شصت و چهارمین اجلاس کمیته ملی استاندارد مدیریت کیفیت مورخ ۱۳۹۳/۱۲/۲۶ مورد تصویب قرار گرفته است، اینک به استناد بند یک ماده ۳ قانون اصلاح قوانین و مقررات موسسه استاندارد و تحقیقات صنعتی ایران، مصوب بهمن‌ماه ۱۳۷۱، به عنوان استاندارد ملی ایران منتشر می‌شود.

برای حفظ همگامی و هماهنگی با تحولات و پیشرفت‌های ملی و جهانی در زمینهٔ صنایع، علوم و خدمات، استانداردهای ملی ایران در موقع لزوم تجدیدنظر خواهد شد و هر پیشنهادی که برای اصلاح و تکمیل این استانداردها ارائه شود، هنگام تجدیدنظر در کمیسیون فنی مربوط موردنظره قرار خواهد گرفت. بنابراین، باید همواره از آخرین تجدیدنظر استانداردهای ملی استفاده کرد.

منبع و مأخذی که برای تهیه این استاندارد مورد استفاده قرار گرفته به شرح زیر است:

ASTM E 178- 08, Standard Practice for Dealing with Outlying Observations.

تصمیم‌گیری در مورد مشاهده‌های دورافتاده—آیین کار

۱ هدف و دامنه کاربرد

۱-۱ هدف از تدوین این استاندارد، بیان مشاهده‌های دورافتاده در نمونه‌ها و چگونگی آزمون معنی‌دار بودن آماری آن‌ها می‌باشد. یک مشاهده یا داده دورافتاده، داده‌ای است، که ظاهراً انحراف محسوسی از دیگر اعضای نمونه‌ای که در آن اتفاق افتاده، دارد (نمونه آماری). در این خصوص دو گزینه زیر سودمند هستند:

۱-۱-۱ یک داده دورافتاده ممکن است صرفاً یک ظهر حداکثری از تغییرپذیری تصادفی ذاتی در نمونه‌ها باشد. اگر این گونه باشد، مقدار باید نگهداشته و مانند دیگر مشاهده‌ها در نمونه پردازش شود.

۱-۱-۲ از طرف دیگر، یک داده دورافتاده ممکن است نتیجه انحراف فاحش از روش آزمایش تعیین‌شده یا یک خطأ در محاسبات یا ثبت مقدار عددی باشد. در این مورد تحقیقی به منظور تعیین علت مقدار دارای انحراف می‌تواند مطلوب باشد. ممکن است حتی مشاهده درنتیجه تحقیق رد شود حتی اگر الزاماً این‌طور نباشد. در هر صورت در مراحل بعدی آنالیز داده‌ها، شاید تشخیص داده شود داده یا داده‌های دورافتاده از جمعیتی متفاوت با دیگر مقادیر نمونه بوده‌اند.

۱-۲ در این استاندارد هدف فراهم آوردن قوانین آماری است که منجر به یک آزمایشگر تقریباً بدون خطأ در جستجوی علل داده‌های دورافتاده وقتی که واقعاً وجود دارند خواهد شد و بنابراین تصمیم گرفتن در مورد اینکه آیا بند ۱-۱-۱ بالا، فرضیه با احتمال پذیرش بیشتر در مقایسه با بند ۱-۱-۲ نیست، تا اینکه شاید مناسب‌ترین اقدام در تحلیل داده‌ها در آینده انجام شود. روش‌های پوشش داده‌شده در اینجا اصولاً برای ساده‌ترین نوع از داده‌های آزمایشی، یا به عبارت دیگر، اندازه‌گیری‌های تکراری برخی مشخصات از یک ماده معین، یا مشاهده‌ها در یک نمونه تصادفی منفرد به صورت فرضی به کار می‌روند. با این حال آزمون‌های پیشنهاد شده یک دامنه به اندازه کافی وسیع از موارد را پوشش می‌دهند تا عملاً کارایی وسیعی داشته باشند.

۲ مراجع الزامی

مدارک الزامی زیر، حاوی مقرراتی است که در متن این استاندارد ملی ایران به آن‌ها ارجاع داده شده است. بدین ترتیب آن مقررات، جزئی از این استاندارد ملی ایران محسوب می‌شود.

در صورتی که به مدرکی با ذکر تاریخ انتشار ارجاع داده شده باشد، اصلاحیه‌ها و تجدیدنظرهای بعدی آن موردنظر این استاندارد ملی ایران نیست. در مورد مدارکی که بدون ذکر تاریخ انتشار به آن‌ها ارجاع داده شده است، همواره آخرین تجدیدنظر و اصلاحیه‌های بعدی آن‌ها موردنظر است.

2-1 ASTM Standards: E 456 Terminology Relating to Quality and Statistics

۳ اصطلاحات و تعاریف

در این استاندارد علاوه بر اصطلاحات و تعاریف تعیین شده در استاندارد ASTM E 456 اصطلاحات و تعاریف زیر نیز به کار می‌روند:

۱-۳

داده دورافتاده

به مشاهده‌های دورافتاده (بند ۲-۳) مراجعه شود.

۲-۳

مشاهده‌های دورافتاده n یک مشاهده دورافتاده که ظاهرآ از نظر مقدار، انحراف محسوسی از دیگر نمونه‌هایی که در آن بروز می‌کند را دارد.

۴ اهمیت و کاربرد

۱-۴ وقتی آزمون‌کننده به‌وضوح آگاه است که یک انحراف فاحش از روش آزمایش تعیین شده رخداده است. مشاهده‌های حاصله می‌باشد بدون مراجعه به آزمون‌های آماری داده‌های دورافتاده، دور انداخته شود، چه موفق با سایر داده‌ها باشد و چه نباشد. اگر یک روش تصحیح قابل اعتماد، مثلاً برای دما وجود داشته باشد، برخی اوقات مشاهده‌ها می‌توانند تصحیح شده و نگه داشته شوند.

۲-۴ در بسیاری از موارد مدرک انحراف از روش تعیین شده اصولاً خود حاکی از مقدار ناهماهنگ خواهد بود، در این موارد داشتن رفتار بالحتیاط توصیه می‌شود. استفاده از یکی از معیارهای شرح داده شده زیر در برخی مواقع مجوز یک تصمیم صریح را فراهم خواهد کرد. در موارد مشکوک تصمیم آزمون‌کننده تأثیر قابل توجهی خواهد داشت. وقتی که آزمون‌کننده نتواند شرایط غیرطبیعی را تشخیص دهد، باید حداقل، مقدار ناهماهنگ را گزارش کند و مشخص کند تا چه اندازه از آن‌ها در تجزیه و تحلیل داده‌ها استفاده شده است.

۳-۴ درنتیجه، برای آشنایی نسبی با مجموع مشکلات آزمایش، جایگاه ما در موضوع غربال نمونه‌ها از نظر مشاهده‌های دورافتاده دقیقاً به شکل زیر می‌باشد:

۴-۱-۳-۱ دلایل فیزیکی شناخته شده یا کشف شده برای داده (های) دورافتاده

۱-۱-۳-۲ رد کردن مشاهده (های).

۱-۱-۳-۳ تصحیح مشاهده (های) در زمانه های فیزیکی.

۱-۱-۳-۴ رد کردن آن (آن های) و در صورت امکان گرفتن مشاهده های بیشتر.

۱-۲-۳-۱ دلایل فیزیکی ناشناخته - استفاده از آزمون آماری

۱-۲-۳-۲ رد کردن مشاهده (های).

۱-۲-۳-۳ تصحیح مشاهده (های) به صورت آماری.

۱-۲-۳-۴ رد کردن آن (آن های) و در صورت امکان گرفتن مشاهده های اضافی.

۱-۲-۳-۵ استفاده از تئوری نمونه حذف شده^۱ برای مشاهده های حذف شده.

۱-۴ آزمون آماری همیشه برای تایید این عقیده که برای یک داده دورافتاده واقعاً یک دلیل فیزیکی وجود دارد می تواند به کاربرده شود. یا معیار آماری می تواند به صورت معمول به عنوان مبنای برای اقدام اولیه برای یافتن یک علت فیزیکی به کار برده شود.

۵ اساس ضوابط آماری برای داده های دورافتاده

۱-۵ روابط آماری متعددی برای آزمون داده های دورافتاده وجود دارد. در همه آن ها مشاهده مشکوک در محاسبه مقدار عددی یک معیار نمونه (آمار) به حساب آورده می شود، که آن هم سپس بر اساس تئوری نمونه برداری تصادفی جهت تعیین اینکه آیا مشاهده مشکوک باید نگهداشته یا رد شود با یک مقدار بحرانی مقایسه می شود. مقدار بحرانی آن مقدار از معیار نمونه می باشد که به صورت اتفاقی از احتمال معین اندک (کوچک)، با فرض اینکه همه مشاهده ها در واقع نمونه ای تصادفی از یک مجموعه علی رایج، یک جمعیت تک مولد، توزیع یا جامعه را تشکیل دهد، بیشتر خواهد بود. احتمال کوچک معین "سطح اهمیت" یا "نقشه درصد" نامیده می شود و می تواند به عنوان خطر حذف اشتباهی یک مشاهده خوب در نظر گرفته شود. بدیهی است که اگر به دلایل غیر تصادفی، یک جابجایی یا تغییر واقعی در داده های از یک مشاهده وجود داشته باشد (خطای انسانی، کالیبره نبودن دستگاه، تغییر دستگاه اندازه گیری یا حتی تغییر در زمان اندازه گیری و غیره)، در این صورت مقدار به دست آمده از معیار نمونه مورد استفاده، از مقدار بحرانی مبتنی بر تئوری نمونه برداری تصادفی بیشتر خواهد بود. جداول مقادیر بحرانی معمولاً برای انواع مختلف سطوح اهمیت ارائه شده است، برای مثال، ۵٪، ۱٪. برای آزمون آماری داده های دورافتاده، عموماً توصیه می شود که یک سطح اهمیت پایین، مانند ۱٪ استفاده شود و سطوح اهمیت بیشتر از ۵٪ معمولاً در عمل توصیه نمی شوند.

یادآوری - در این روش معمولاً کاربرد سطح اهمیت ۵٪ را تشریح خواهیم کرد. انتخاب مناسب سطح احتمال به مورد خاص و هر چیزی که ممکن است شامل شود، به اضافه خطر تمایل شخص به حذف یک مشاهده خوب بستگی دارد. به عبارت دیگر، چنان چه تشریح فرضیه صفر "همه مشاهده ها در نمونه از یک جمعیت مشابه نرمال باشند" فرض صحیح باشد.

۲-۵ باید نشان داده شود که تقریباً همه روابط داده‌های دورافتاده بر اساس فرض جمعیت یا توزیع نرمال (گوسی) هستند. وقتی داده‌ای به صورت نرمال یا تقریباً به صورت نرمال توزیع نشده باشد، احتمالات مربوط به این آزمون‌ها تغییر خواهد کرد. در چنین موقعی که معیار از فرض نرمال پیروی نمی‌کند آزمون‌کننده می‌بایست نسبت به تفسیر احتمالات بسیار دقیق و باحتیاط عمل کند.

۳-۵ اگرچه هدف اصلی در اینجا شناسایی مشاهده‌های دورافتاده است، متذکر می‌شویم که برخی از روابط آماری موجود همچنین ممکن است برای آزمودن فرضیه‌های نرمال بودن یا اینکه نمونه تصادفی، گرفته شده، از جمعیت نرمال یا گوسی می‌آید، استفاده شود. نتیجه نهایی برای همه اهداف عملی یکسان است.

۶ ضوابط توصیه شده برای نمونه‌های منفرد

۱-۶ اجازه دهید یک نمونه n مشاهده‌ای بر اساس مرتبه بزرگی به صورت صعودی مرتب شود، به طوری که $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ باشد. اجازه دهید x_n که بزرگ‌ترین مقدار است مقدار مشکوک باشد. در اینجا معیار آزمون T_n توصیه شده برای یک داده دورافتاده منفرد به صورت زیر می‌باشد:

$$T_n = (x_n - \bar{x})/s \quad \text{که در آن}$$

\bar{x} میانگین ریاضی همه n مقدار

s تخمین انحراف استاندارد جمعیت بر اساس داده‌های نمونه آماری است که از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2/n}{n-1}}$$

اگر x_1 نسبت به x_n مقدار مشکوکی باشد، معیار به صورت زیر خواهد بود:

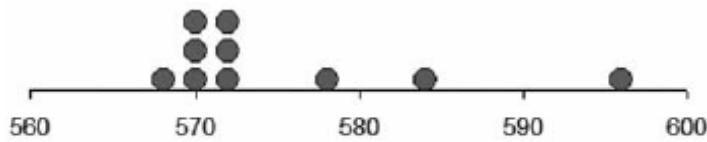
$$T_1 = (\bar{x} - x_1)/s$$

مقدار بحرانی برای هر یک از دو مورد، برای سطوح اهمیت ۱٪ و ۵٪ در جدول ۱ و جداول بعدی سطوح اهمیت یک‌سویه را به معرض نمایش می‌گذارند. در روش آزمایشی قبلی (۱۹۶۱) جداول فهرست شده‌ی مقادیر سطوح اهمیت حالت‌های دوسویه‌ی آن‌هایی است که در روش فعلی ارائه شده‌اند، چون فرض شده است که آزمون‌کننده می‌تواند پایین‌ترین مشاهده یا بالاترین مشاهده (یا هر دو) را از نظر اهمیت آماری مورد آزمون قرار می‌گیرند. به‌حال برای سازگاری با روش واقعی و جلوگیری از سوء‌تعابیرهای بعدی در اینجا سطوح اهمیت یک‌طرفه به صورت جدول در آمده است در حالی که هر دو نقطه نظر می‌توانند وجود داشته باشند.

۲-۶ فرضیه‌ای که در هر مورد آزمون می‌شود، این است که همه مشاهده‌ها در نمونه از جمعیت مشابه نرمال هستند. برای مثال اجازه دهید یک سطح اهمیت ۰,۰۵ را بپذیریم. اگر فقط به داده‌های دورافتاده که در سمت بالا اتفاق می‌افتد علاقه‌مند باشیم همیشه باید از رابطه آماری $T_n = (x_n - \bar{x})/s$ استفاده کنیم، و نقطه ۰,۰۵ از جدول ۱ را به عنوان

مقدار بحرانی انتخاب کنیم. از طرف دیگر اگر فقط به داده‌های دورافتاده که در سمت پایین اتفاق می‌افتد علاقه‌مند باشیم همیشه باید از رابطه آماری $s = T_1 = \bar{x} - x_1$ استفاده کنیم و مجدداً به عنوان نقطه بحرانی نقطه ۰،۰۵ از جدول ۱ را انتخاب نماییم. تصور کنید، هرچند ما به داده‌های دورافتاده واقع شده در هر یک از طرفین علاقه‌مند هستیم، ولی به این مطلب که داده‌های دورافتاده می‌توانند به طور همزمان در هر دو طرف اتفاق افتد، باور نداریم. برای مثال می‌توانیم باور داشته باشیم که گاهی در حین آزمایش چیزی ممکن است اتفاق افتد که باعث یک تغییر تصادفی در طرف بالا یا طرف پایین شود، اما این بسیار غیرمحتمل است که دو یا بیشتر از این دست رخدادها یکی برای یک تغییر تصادفی در سمت بالا و دیگری برای یک تغییر تصادفی در سمت پایین بتوانند اتفاق افتد که باشد. با این نظرگاه ما باید از روابط آماری $T_1 = \bar{x} - x_1$ یا $T_n = (x_n - \bar{x})/s$ یا $T_1 = \bar{x}$ هر کدام که بزرگ‌تر است استفاده کنیم. اگر در این مثال ما از نقطه ۰،۰۵ جدول ۱ به عنوان نقطه بحرانی خود استفاده کنیم، سطح اهمیت واقعی دو برابر ۰،۰۵ یا ۱/۰ خواهد بود. اگر یک سطح اهمیت ۰،۰۵ و نه ۱/۰ موردنظر باشد در این مورد باید نقطه ۰،۰۲۵ از جدول ۱ را به عنوان مقدار بحرانی استفاده کنیم. ملاحظات مشابه برای دیگر آزمون‌های داده‌شده در زیر به کار می‌رود.

۱-۲-۶ مثال ۱- به عنوان یک توضیح از کاربرد T_n و جدول ۱، ده مشاهده زیر را بر روی استحکام در برابر شکستگی (برحسب پوند) سیم مسی کشیده شده ۰،۱۰۴ اینچی در نظر بگیرید: ۵۶۸، ۵۷۰، ۵۷۲، ۵۷۴، ۵۷۶، ۵۷۷، ۵۷۹، ۵۸۰، ۵۸۴، ۵۹۶. شکل ۱ را ملاحظه کنید. داده مشکوک، مقدار بالایی $x_{10} = ۵۹۶$ می‌باشد.



شکل ۱- ده اندازه‌گیری استحکام در برابر شکست از مثال ۱

آیا مقدار ۵۹۶ نسبتاً زیاد است؟ مقدار میانگین $\bar{x} = ۵۷۵/۲$ و انحراف استاندارد تخمینی $s = ۸/۷۰$ است. ما محاسبه نمودیم:

$$T_{10} = \frac{(596 - 575.2)}{8.7} = 2.39$$

از جدول ۱ و برای $n=10$ ملاحظه کنید که یک T_n به بزرگی ۲/۳۹ می‌تواند به صورت تصادفی و با احتمال کمتر از ۰،۰۵ اتفاق افتد. در حقیقت یک مقدار به این بزرگی به صورت شناسی اغلب نمی‌تواند بیش از ۱٪ اوقات اتفاق افتد. بنابراین با توجه به شواهد و برخلاف مقدار مشکوک، این داده مانند دیگران از یک جمعیت مشابه یکسان ناشی شده است (با فرض اینکه جمعیت به صورت نرمال توزیع شده است). بنابراین بررسی مقدار مشکوک مشخص شده است.

جدول ۱ - مقادیر بحرانی برای T (آزمون یک-طرفه) وقتی انحراف استاندارد از نمونه‌های مشابه محاسبه می‌شود

تعداد مشاهده n	سطح اهمیت بالاتر از ۰/۱٪	سطح اهمیت بالاتر از ۰/۵٪	سطح اهمیت بالاتر از ۱٪	سطح اهمیت بالاتر از ۲/۵٪	سطح اهمیت بالاتر از ۵٪	سطح اهمیت بالاتر از ۱۰٪
3	1.148	1.153	1.155	1.155	1.155	1.155
4	1.425	1.463	1.481	1.492	1.496	1.499
5	1.602	1.672	1.715	1.749	1.764	1.780
6	1.729	1.822	1.887	1.944	1.973	2.011
7	1.828	1.938	2.020	2.097	2.139	2.201
8	1.909	2.032	2.126	2.221	2.274	2.358
9	1.997	2.110	2.215	2.323	2.387	2.492
10	2.036	2.176	2.290	2.410	2.482	2.606
11	2.088	2.234	2.355	2.485	2.564	2.705
12	2.134	2.285	2.412	2.550	2.636	2.791
13	2.175	2.331	2.462	2.607	2.699	2.867
14	2.213	2.371	2.507	2.659	2.755	2.935
15	2.247	2.409	2.549	2.705	2.806	2.997
16	2.279	2.443	2.585	2.747	2.852	3.052
17	2.309	2.475	2.620	2.785	2.894	3.103
18	2.335	2.504	2.651	2.821	2.932	3.149
19	2.361	2.532	2.681	2.854	2.968	3.191
20	2.385	2.557	2.709	2.884	3.001	3.230
21	2.408	2.580	2.733	2.912	3.031	3.266
22	2.429	2.603	2.758	2.939	3.060	3.300
23	2.448	2.624	2.781	2.963	3.087	3.332
24	2.467	2.644	2.802	2.987	3.112	3.362
25	2.486	2.663	2.822	3.009	3.135	3.389
26	2.502	2.681	2.841	3.029	3.157	3.415
27	2.519	2.698	2.859	3.049	3.178	3.440
28	2.534	2.714	2.876	3.068	3.199	3.464
29	2.549	2.730	2.893	3.085	3.218	3.486
30	2.563	2.745	2.908	3.103	3.236	3.507
31	2.577	2.759	2.924	3.119	3.253	3.528
32	2.591	2.773	2.938	3.135	3.270	3.546
33	2.604	2.786	2.952	3.150	3.286	3.565
34	2.616	2.799	2.965	3.164	3.301	3.582

جدول ١ - ادامه

2,628	2,811	2,979	3,178	3,316	3,559	35
2,639	2,823	2,991	3,191	3,330	3,616	36
2,650	2,835	3,003	3,204	3,343	3,631	37
2,661	2,846	3,014	3,216	3,356	3,646	38
2,671	2,857	3,025	3,288	3,369	3,660	39
2,682	2,866	3,036	3,240	3,381	3,673	40
2,692	2,877	3,046	3,251	3,393	3,687	41
2,700	2,887	3,057	3,261	3,404	3,700	42
2,710	2,896	3,067	3,271	3,415	3,712	43
2,719	2,905	3,075	3,282	3,425	3,724	44
2,727	2,914	3,085	3,292	3,435	3,736	45
2,736	2,923	3,094	3,302	3,445	3,747	46
2,744	2,931	3,103	3,310	3,455	3,757	47
2,753	2,940	3,111	3,319	3,464	3,768	48
2,760	2,948	3,120	3,329	3,474	3,779	49
2,768	2,956	3,128	3,336	3,483	3,789	50
2,775	2,964	3,136	3,345	3,491	3,798	51
2,783	2,971	3,143	3,353	3,500	3,808	52
2,790	2,978	3,151	3,361	3,507	3,816	53
2,798	2,986	3,158	3,368	3,516	3,825	54
2,804	2,992	3,166	3,376	3,524	3,834	55
2,811	3,000	3,172	3,383	3,531	3,842	56
2,818	3,006	3,180	3,391	3,539	3,851	57
2,824	3,013	3,186	3,397	3,546	3,858	58
2,831	3,019	3,193	3,405	3,553	3,867	59
2,837	3,025	3,199	3,411	3,560	3,874	60
2,842	3,032	3,205	3,418	3,566	3,882	61
2,849	3,037	3,212	3,424	3,573	3,889	62
2,854	3,044	3,218	3,43	3,579	3,896	63
2,860	3,049	3,224	3,437	3,586	3,903	64
2,866	3,055	3,230	3,442	3,592	3,910	65
2,871	3,061	3,235	3,449	3,598	3,917	66
2,877	3,066	3,241	3,454	3,605	3,923	67
2,883	3,071	3,246	3,460	3,610	3,930	68
2,888	3,076	3,252	3,466	3,617	3,936	69
2,893	3,082	3,257	3,471	3,622	3,942	70

جدول ١ - ادامه

2.897	3.087	3.262	3.476	3.627	3.948	71
2.903	3.092	3.267	3.482	3.633	3.954	72
2.908	3.098	3.272	3.487	3.638	3.960	73
2.912	3.102	3.278	3.492	3.643	3.965	74
2.917	3.107	3.282	3.496	3.648	3.971	75
2.922	3.111	3.287	3.502	3.654	3.977	76
2.927	3.117	3.658	3.507	3.658	3.982	77
2.931	3.121	3.663	3.511	3.663	3.987	78
2.935	3.125	3.301	3.516	3.669	3.992	79
2.94	3.13	3.305	3.521	3.673	3.998	80
2.945	3.134	3.309	3.525	3.677	4.002	81
2.949	3.139	3.315	3.529	3.682	4.007	82
2.953	3.143	3.319	3.534	3.687	4.012	83
2.957	3.147	3.323	3.539	3.691	4.017	84
2.961	3.151	3.327	3.543	3.695	4.021	85
2.966	3.155	3.331	3.547	3.699	4.026	86
2.97	3.16	3.335	3.551	3.704	4.031	87
2.973	3.163	3.339	3.555	3.708	4.035	88
2.977	3.167	3.343	3.559	3.712	4.039	89
2.981	3.171	3.347	3.563	3.716	4.044	90
2.984	3.174	3.35	3.567	3.72	4.049	91
2.989	3.179	3.355	3.57	3.725	4.053	92
2.993	3.182	3.358	3.575	3.728	4.057	93
2.996	3.186	3.362	3.579	3.732	4.06	94
3	3.189	3.365	3.582	3.736	4.064	95
3.003	3.193	3.369	3.586	3.739	4.069	96
3.006	3.196	3.372	3.589	3.744	4.073	97
3.011	3.201	3.377	3.593	3.747	4.076	98
3.014	3.204	3.38	3.597	3.75	4.08	99
3.017	3.207	3.383	3.6	3.754	4.084	100
3.021	3.21	3.386	3.603	3.757	4.088	101
3.024	3.214	3.39	3.607	3.76	4.092	102
3.027	3.217	3.393	3.61	3.765	4.095	103
3.03	3.22	3.397	3.614	3.768	4.098	104
3.033	3.224	3.4	3.617	3.771	4.102	105

جدول ١ - ادامه

3.037	3.227	3.403	3.62	3.774	4.105	106
3.04	3.23	3.406	3.623	3.777	4.109	107
3.043	3.233	3.409	3.626	3.78	4.112	108
3.046	3.236	3.412	3.629	3.784	4.116	109
3.049	3.239	3.415	3.632	3.787	4.119	110
3.052	3.242	3.418	3.636	3.79	4.122	111
3.055	3.245	3.422	3.639	3.793	4.125	112
3.058	3.248	3.424	3.642	3.796	4.129	113
3.061	3.251	3.427	3.645	3.799	4.132	114
3.064	3.254	3.430	3.647	3.802	4.135	115
3.067	3.257	3.433	3.650	3.805	4.138	116
3.070	3.259	3.435	3.653	3.808	4.141	117
3.073	3.262	3.438	3.656	3.811	4.144	118
3.075	3.265	3.441	3.659	3.814	4.146	119
3.078	3.267	3.444	3.662	3.817	4.150	120
3.081	3.270	3.447	3.665	3.819	4.153	121
3.083	3.274	3.450	3.667	3.822	4.156	122
3.086	3.276	3.452	3.670	3.824	4.159	123
3.089	3.279	3.455	3.672	3.827	4.161	124
3.092	3.281	3.457	3.675	3.831	4.164	125
3.095	3.284	3.460	3.677	3.833	4.166	126
3.097	3.286	3.462	3.680	3.836	4.169	127
3.100	3.289	3.465	3.683	3.838	4.173	128
3.102	3.291	3.467	3.686	3.840	4.175	129
3.104	3.294	3.470	3.688	3.843	4.178	130
3.107	3.296	3.473	3.690	3.845	4.180	131
3.109	3.298	3.475	3.693	3.848	4.183	132
3.112	3.302	3.478	3.695	3.850	4.185	133
3.114	3.304	3.480	3.697	3.853	4.188	134
3.116	3.306	3.482	3.700	3.856	4.190	135
3.119	3.309	3.484	3.702	3.858	4.193	136
3.122	3.311	3.487	3.704	3.860	4.196	137
3.124	3.313	3.489	3.707	3.863	4.198	138
3.126	3.315	3.491	3.710	3.865	4.200	139
3.129	3.318	3.493	3.712	3.867	4.203	140

جدول ۱- ادامه

3.131	3.320	3.497	3.714	3.869	4.205	141
3.133	3.322	3.499	3.716	3.871	4.207	142
3.135	3.324	3.501	3.719	3.874	4.209	143
3.138	3.326	3.503	3.721	3.876	4.212	144
3.140	3.328	3.505	3.723	3.879	4.214	145
3.142	3.331	3.507	3.725	3.881	4.216	146
3.144	3.334	3.509	3.727	3.883	4.219	147

$$T_n = (x - \bar{x})/s$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2/n}{n-1}}$$

$$T_1 = [(\bar{x} - x_1)/s], x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

۳-۶ یک سیستم جایگزین، معیار دیکسون است که کاملاً بر اساس نسبت‌های اختلاف بین مشاهده‌های تشریح شده در مرجع ^۳(۱) می‌باشد، و می‌تواند در مواردی که اجتناب از محاسبه σ موردنظر است و یا قضاوت سریع موردنیاز است استفاده شود. برای آزمون دیکسون نمونه آماری با اندازه نمونه تغییر می‌کند. در جدول ۲ روابط آماری اختصاصی برای محاسبه و همچنین مقادیر بحرانی آماری برای سطوح اهمیت ۱٪، ۵٪ و ۱۰٪ داده شده است.

۳-۷ مثال ۲- به عنوان یک مثال از کاربرد آزمون دیکسون، باز دیگر مشاهده‌های استحکام در برابر شکستگی ارائه شده در مثال ۱ را ملاحظه نمایید و فرض کنید که تعداد زیادی از این نمونه‌ها به سرعت از نظر داده‌های دورافتاده غربال شده‌اند و در زمان بسیار طولانی برای محاسبه σ ارزیابی شده‌اند. جدول ۲ استفاده از

$$r_{11} = (x_n - x_{n-1})/(x_n - x_2)$$

نشان داده است.

بنابراین برای $n=10$

$$r_{11} = (x_{10} - x_9)/(x_{10} - x_2)$$

برای اندازه‌گیری استحکام در برابر شکستگی فوق

$$0.462r_{11} = (596 - 584)/(596 - 570)$$

که اندکی کمتر از ۴۷۷٪/۰ یعنی مقدار بحرانی ۵٪ برای $n=10$ می‌باشد. بر اساس معیار دیکسون ما نباید در سطح اهمیت ۵٪ این مشاهده را به عنوان یک داده دورافتاده به حساب آوریم. این نتایج نشان می‌دهد که چگونه موارد مرزی می‌توانند بر اساس یک آزمون پذیرفته ولی بر اساس آزمون دیگر رد شوند.

جدول ۲ - معیار دیکسون برای آزمون مشاهده‌های بینهایت (نمونه منفرد)^A

سطح اهمیت یکسویه			تیمار	<i>n</i>
۱۰٪	۵٪	۱٪		
0.886	0.941	0.988	$r_{10} = (x_2 - x_1)/(x_n - x_1)$ $= (x_n - x_{n-1})/(x_n - x_1)$	3
0.679	0.765	0.889		4
0.557	0.642	0.780		5
0.482	0.560	0.698		6
0.434	0.507	0.637		7
0.434	0.507	0.637		8
0.479	0.554	0.683	$r_{11} = (x_2 - x_1)/(x_{n-1} - x_1)$ $= (x_n - x_{n-1})/(x_n - x_2)$	9
0.441	0.512	0.635		10
0.409	0.477	0.597		11
0.517	0.576	0.679	$r_{21} = (x_2 - x_1)/(x_{n-1} - x_1)$ $= (x_n - x_{n-2})/(x_n - x_2)$	12
0.490	0.546	0.642		13
0.467	0.521	0.615		14
0.492	0.546	0.641		15
0.472	0.525	0.616		16
0.454	0.507	0.595		17
0.438	0.490	0.577		18
0.424	0.475	0.561	$r_{22} = (x_2 - x_1)/(x_{n-2} - x_1)$ $= (x_n - x_{n-2})/(x_n - x_2)$	19
0.412	0.462	0.547		20
0.401	0.450	0.535		21
0.391	0.440	0.524		22
0.382	0.430	0.514		23
0.374	0.421	0.505		24
0.367	0.413	0.497		25
0.360	0.406	0.489		26
0.354	0.399	0.486		27
0.348	0.393	0.475		28
0.342	0.387	0.469		29
0.337	0.381	0.463		30
0.332	0.376	0.457		

^A $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

این مطلب باید به خاطر سپرده شود، هرچند رابط آماری T تشریح شده در بالا، بهترین رابطه جهت استفاده برای موارد منفرد داده دورافتاده است و قضاؤت آماری نهایی باید بر اساس آن باشد. فرگوسن¹ (به کتابنامه ۳ و ۴ مراجعه شود) را ملاحظه کنید.

۲-۳-۶ آزمون‌های بیشتر مشاهده‌ها بر روی استحکام در برابر شکستگی سیم مسی کشیده شده نشان می‌دهد که هیچ‌کدام از مقادیر دیگر نیاز به آزمون ندارند.

یادآوری- به صورت تجربی ممکن است معمولاً فقط به مقادیر نمونه نگاه کنیم تا اگر یک داده دورافتاده وجود دارد، مشاهده شود. هرچند اگر بخواهیم دقیق شویم، به منظور تضمین سطح اهمیت استفاده شده، آزمون آماری باید برای کلیه نمونه‌ها به کاربرده شود. در باب آزمون‌های چندگانه برای یک نمونه منفرد توضیحاتی در زیر ارائه می‌کنیم.

۴-۶ یک آزمون معادل با T_n یا (T_1) بر اساس مجموع مربع انحرافات از مقدار میانگین برای همه مشاهده‌ها و مجموع مربع انحراف‌های بدون داده دورافتاده توسط گرابس (به کتابنامه ۵ مراجعه شود) داده شده است.

۵-۶ نوع دیگر مشکل بررسی مواردی است که احتمالاً دو مشاهده دورافتاده داریم، کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مشاهده در یک نمونه (مشکل آزمون مربوط به دو بالاترین و دو پایین‌ترین مشاهده‌ها در زیر بررسی شده است) در آزمون کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مشاهده‌ها به صورت همزمان و به عنوان داده‌های دورافتاده احتمالی در یک نمونه، نسبت دامنه نمونه به انحراف استاندارد نمونه را به کار بردشود، در آزمون هارتلی، دیوید و پیرسون^۱ (به کتابنامه ۶ مراجعه شود). سطوح اهمیت برای این نمونه آماری در جدول ۳ آورده شده است. به طور متناسب آزمون بزرگ‌ترین باقیمانده‌های تای جن و مور^۲ (به کتابنامه ۷ مراجعه شود) می‌تواند استفاده شود. در ادامه یک مثال در زمینه‌ی ستاره‌شناسی ارائه شده است.

۱-۵-۳- یک دسته از مشاهده‌ها نسبتاً معروف وجود دارد که برخی از نویسنده‌ها در به کار بردن آزمون‌های گوناگون خودشان در موضوع مشاهده‌های دورافتاده برای داده‌های دورافتاده به آن‌ها ارجاع می‌دهند. این دسته کلاسیک شامل یک نمونه ۱۵ مشاهده‌ای از شعاع عمودی ونسس که توسط ستوان هرن‌دان^۳ (به کتابنامه ۸ مراجعه شود) در سال ۱۸۴۶ تهیه شده است، می‌باشد. در کاهش مشاهده‌ها پروفسور پیرس^۴، دو کمیت مجھول را فرض کرد و باقیمانده‌های زیر را که به صورت صعودی منظم شده‌اند، بنا نهاد.

-۱,۴۰	-۰,۲۴	-۰,۰۵	۰,۱۸	۰,۴۸
-۰,۴۴	-۰,۲۲	۰,۰۶	۰,۲۰	۰,۶۳
-۰,۳۰	-۰,۱۳	۰,۱۰	۰,۳۹	۱,۰۱

انحراف‌های ۱,۴۰ و ۱,۰۱ به نظر داده‌های دورافتاده می‌باشند. در اینجا مشاهده‌ها مشکوک در دو طرف نمونه قرار گرفته‌اند. کارهای بسیار کمتری برای موردی که داده‌های دورافتاده در دو طرف نمونه قرار دارند در مقایسه با حالتی که

1- Hartly, David&Pearson

2- Tiejen& moore

3- Herndon

4- Pierce

یک یا چند داده دورافتاده فقط در یک طرف نمونه قرار دارند، انجام گرفته است. این موضوع ضرورتی ندارد زیرا موارد یکسویه در عمل بسیار رایج‌تر است و همچنین پرداختن به آزمون‌های دوسویه بسیار دشوارتر است. برای یک داده دورافتاده بالا و یک داده دورافتاده پایین در یک نمونه منفرد، دو روش زیر را بیان می‌کنیم، اولین روش ترکیبی از آزمون‌ها است، و دومین روش یک آزمون تک از تای جن و مور (به کتابنامه ۷ مراجعه شود) است که می‌تواند تا حدودی خواص بهینه داشته باشد. برای روش‌های بهینه زمانی که تخمین مستقلی در دست است،^۲ یا^۳ ۵، به کتابنامه ۹ مراجعه شود.

۶-۶ برای مشاهده‌های ارائه شده فوق درباره شعاع و نوس، کلیه اطلاعات راجع به خطای اندازه‌گیری در نمونه‌ی ۱۵ باقیمانده‌ای، قرار گرفته است. در چنین مواردی که هیچ تخمین مستقلی از واریانس وجود ندارد (یعنی هنوز یک مورد نمونه منفرد داریم)، یک رابطه آماری مناسب، نسبت دامنه مشاهده‌ها به انحراف استاندارد نمونه است.

$$\frac{w}{s} = (x_n - x_1)/s$$

$$W=x_n-x_1 \\ x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - ((\bar{x})^2)}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i^2/n)}{n-1}}$$

جایی که

$$s = \sqrt{\sum \left[(x_i - \bar{x})^2 / n-1 \right]}$$

جدول ۳ - مقادیر بحرانی (آزمون یک طرفه) برای w/s (نسبت دامنه به انحراف استاندارد)

مشاهده <i>n</i>	سطح اهمیت ۵٪	سطح اهمیت ۱٪	سطح اهمیت ۰.۵٪
3	2.00	2.00	2.00
4	2.45	2.44	2.43
5	2.81	2.80	2.75
6	3.12	3.10	3.01
7	3.37	3.34	3.22
8	3.58	3.54	3.40
9	3.77	3.72	3.55
10	3.94	3.88	3.68
11	4.08	4.01	3.80
12	4.21	4.13	3.91
13	4.32	4.24	4.00
14	4.43	4.34	4.09
15	4.53	4.43	4.17
16	4.62	4.51	4.24
17	4.69	4.59	4.31
18	4.77	4.66	4.38
19	4.84	4.73	4.43
20	4.91	4.79	4.49
30	5.39	5.25	4.89
40	5.69	5.54	5.15
50	5.91	5.77	5.35
60	6.09	5.93	5.50
80	6.35	6.18	5.73
100	6.54	6.36	5.90
150	6.84	6.64	6.18
200	7.03	6.85	6.38
500	7.60	7.42	6.94
1000	7.99	7.80	7.33

اگر مقدار x_n به همان اندازه بالاتر از میانگین باشد که مقدار x_1 پایین‌تر است و اگر w/s از مقدار بحرانی انتخاب شده بیشتر باشد بنابراین شخص نتیجه خواهد گرفت که هر دو مقدار مشکوک، داده دورافتاده هستند. اگر چنانچه x_1 و x_n بافصله متفاوت از مقدار میانگین قرار گرفته باشند، یکسری آزمون‌های بیشتری می‌باشد انجام گیرد تا تصمیم گرفته شود که آیا فقط کوچک‌ترین مقدار یا فقط بزرگ‌ترین مقدار یا هر دو مقدار بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین، به عنوان داده دورافتاده حذف شوند.

۷-۶ برای این مثال میانگین و انحراف استاندارد $\bar{x} = 0.551$ و $s = 0.018$

$$\frac{w}{s} = \frac{[1.01 - (-1.40)]}{0.551} = \frac{2.41}{0.551} = 4.374$$

از جدول ۳ برای $n=15$ مشاهده می‌شود که مقدار بحرانی برای سطوح ۱٪ و ۵٪ $w/s = 4,374$ و 5% قرار می‌گیرد، بنابراین اگر آزمون در سطح اهمیت ۵٪ انجام می‌گیرد نتیجه خواهیم گرفت که این نمونه شامل یک یا چند داده دورافتاده است. کوچک‌ترین اندازه‌گیری $1/418$ - اینچ، واحد کمتر از مقدار میانگین است و بزرگ‌ترین اندازه‌گیری $1/01$ اینچ، واحد بالاتر از مقدار میانگین است. از آنجاکه این مقادیر انتهایی به صورت متقابن در اطراف مقدار میانگین نیستند هر دو مقدار انتهایی داده دورافتاده هستند و گرن نه فقط $1/40$ - یک داده دورافتاده است. اینکه $1/40$ - یک داده دورافتاده است را می‌توان با استفاده از رابطه آماری T_1 تابید نمود. چنانچه داریم:

$$T_1 = \frac{(\bar{x} - x_1)}{s} = [0.018 - (-1.40)].0.551 = 2.547$$

این مقدار بزرگ‌تر از مقدار بحرانی برای سطح ۵٪ ($2/409$ از جدول ۱) است و بنابراین مقدار $1/40$ - رد می‌شود. از آنجاکه تصمیم گرفتیم که مقدار $1/40$ - باید حذف شود، 14 مشاهده باقیمانده را به کار می‌بندیم و همچنین مقدار انتهایی بالای $1/01$ را با رابطه زیر

$$T_n = (x_n - \bar{x})/s$$

یا با استفاده از دیکسون r_{22} مورد آزمون قرار می‌دهیم. مقدار $1/40$ - را حذف و مشاهده‌ها باقیمانده را دوباره شماره‌گذاری می‌کنیم. ما محاسبه کردیم:

$$\bar{x} = 16714 = 0.119, s = 0.401$$

$$T_1 = (1.01 - 0.119).0.401 = 2.22$$

از جدول ۱ برای $n=14$ متوجه می‌شویم که یک مقدار به بزرگی ۲/۲۲ با احتمال بیشتر از ۵٪ **موقع اتفاق خواهد افتاد**، بنابراین مقدار ۱/۰۱ می‌بایست در محاسبات بعدی نگهداشته شود. سپس محاسبه کردیم:

$$\begin{aligned} r_{22} &= (x_{14} - x_{12}) / (x_{14} - x_3) \\ &= (1.01 - 0.48) / (1.01 + 0.24) \\ &= 0.53125 \\ &= 0.424 \end{aligned}$$

از جدول ۲ برای $n=14$ مشاهده می‌شود که مقدار بحرانی در سطح ۵٪ برای r_{22} ، برابر با ۰/۵۴۶ است. از آنجاکه مقدار محاسبه شده ما (۰/۴۲۴) کمتر از مقدار بحرانی است، طبق رابطه دیکسون نیز مقدار ۱/۰۱ باید نگهداشته شود و نباید مقادیر بیشتری در این نمونه مورد آزمون قرار گیرند.

یادآوری - باید به این نکته توجه شود که در کاربرد تکراری آزمون‌های داده‌های دورافتاده در یک نمونه، سطح اهمیت کل تغییر خواهد کرد. اگر k آزمون را مورداستفاده قرار دهیم، یک قانون قابل قبول برای به کار بردن یک سطح اهمیت از α/k برای هر آزمون نیاز خواهد بود، چنانچه سطح اهمیت کل حدوداً برابر با α خواهد بود.

۸-۶ برای مشاهده‌های مشکوک در دو طرف بالا و پایین نمونه، و برای رسیدگی به وضعیتی که در آن بعضی از مقادیر $K \geq 2$ باشد، داده‌های دورافتاده مشکوک، بزرگ‌تر و بعضی کوچک‌تر از مقادیر باقیمانده در نمونه هستند، تای جن و مور (به کتابنامه ۷ مراجعه شود) رابطه آماری زیر را پیشنهاد می‌کنند. اجازه دهید مقادیر نمونه به صورت $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ باشند و میانگین \bar{x} را محاسبه کنید. سپس n مقدار باقیمانده مطلق را محاسبه کنید

$r_1 = |x_1 - \bar{x}|, r_2 = |x_2 - \bar{x}|, \dots, r_n = |x_n - \bar{x}|$
 اکنون مشاهده‌های اصلی x_1, x_2, \dots, x_n را مانند z مجدداً علامت‌گذاری کنید، به‌طوری که z_i ، آن مشاهده x است که r_i آن کوچک‌ترین باقیمانده مطلق $|x - \bar{x}|$ باشد. اکنون این معنی است که z_1 نزدیک‌ترین مشاهده x به مقدار میانگین و z_n دورترین مشاهده x از مقدار میانگین است. سپس رابطه تای جن و مور (به کتابنامه ۷ مراجعه شود) برای آزمون تعیین باقیمانده‌های بزرگ‌ترین k عبارت است از:

$$E_k = \left[\sum_{i=1}^{n-k} (z_i - \bar{z}_k)^2 / \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \right]$$

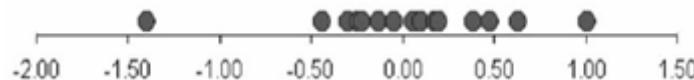
جایی که

$$\bar{z}_k = \sum_{i=1}^{n-k} z_i / (n - k)$$

میانگین از مشاهده‌های انتهایی کوچک‌ترین $(n-k)$ و z میانگین نمونه کل می‌باشد.

۸-۶ با استفاده از این آزمون برای داده‌های بالا، متوجه می‌شویم که جمع کل مربعات انحرافات برای تمام نمونه ۴/۲۴۹۶۴ است. با حذف دو داده دورافتاده مشکوک ۱/۰۱ و ۱/۴۰ متوجه می‌شویم مجموع مربعات انحرافات برای نمونه کاهش‌یافته‌ی ۱۳ مشاهده‌ای برابر با ۱/۲۴۰۸۹ است. بنابراین $E_2 = \frac{1.24089}{4.2496} = 0.292$ و با استفاده از جدول ۴، متوجه می‌شویم که این E_2 مشاهده‌شده کمتر از مقدار بحرانی ۰/۳۱۷ است و بنابراین آزمون E_2 هر دو مشاهده‌ی ۱/۰۱ و ۱/۴۰ را رد خواهد

کرد. احتمالاً توصیه اخیر را به کار می‌بریم زیرا سطح اهمیت برای آزمون E_2 دقیقاً ۰.۰۵ است در حالی که برای کاربردهای مضاعف از یک آزمون برای یک داده دورافتاده نمی‌توان کمتر از $=_{0.95}^{0.975}$ ۱- تضمین نمود. جدول نقاط درصد E_k توسط روش‌های مونت‌کارلو^۱ و با استفاده از یک ماشین حساب الکترونیک پرسرعت محاسبه شده است.



شکل ۲- پانزده باقیمانده از شعاع ونوس از مثال ۳

جدول ۴- $\times 1000$ مقادیر بحرانی (آزمون-یک طرفه) برای E_k Titjen-Moore

k	<i>n</i>												
		α	50	45	40	35	30	25	20	19	18	17	16
1	0.01	0.748	0.728	0.704	0.669	0.624	0.571	0.499	0.484	0.459	0.44	0.422	
	0.05	0.796	0.776	0.756	0.732	0.698	0.654	0.594	0.579	0.562	0.544	0.525	
	0.1	0.82	0.802	0.784	0.762	0.73	0.692	0.638	0.624	0.61	0.593	0.576	
2	0.01	0.636	0.607	0.574	0.533	0.482	0.418	0.339	0.323	0.306	0.29	0.263	
	0.05	0.684	0.658	0.629	0.596	0.549	0.493	0.416	0.398	0.382	0.362	0.34	
	0.1	0.708	0.684	0.657	0.624	0.582	0.528	0.46	0.442	0.424	0.406	0.384	
3	0.01	0.55	0.518	0.48	0.435	0.386	0.32	0.236	0.219	0.206	0.188	0.166	
	0.05	0.599	0.567	0.534	0.495	0.443	0.381	0.302	0.287	0.267	0.248	0.227	
	0.1	0.622	0.593	0.562	0.523	0.475	0.417	0.338	0.322	0.304	0.284	0.263	
4	0.01	0.482	0.446	0.408	0.364	0.308	0.245	0.17	0.156	0.141	0.122	0.107	
	0.05	0.529	0.492	0.458	0.417	0.364	0.298	0.221	0.203	0.187	0.17	0.153	
	0.1	0.552	0.522	0.486	0.443	0.391	0.331	0.252	0.234	0.217	0.198	0.182	
5	0.01	0.424	0.386	0.347	0.299	0.25	0.188	0.121	0.108	0.94	0.79	0.68	
	0.05	0.468	0.433	0.395	0.351	0.298	0.236	0.163	0.146	0.132	0.116	0.102	
	0.1	0.492	0.459	0.422	0.379	0.325	0.264	0.188	0.172	0.156	0.14	0.122	
6	0.01	0.376	0.336	0.298	0.252	0.204	0.146	0.086	0.074	0.062	0.052	0.04	
	0.05	0.417	0.381	0.343	0.298	0.246	0.186	0.119	0.105	0.091	0.078	0.067	
	0.1	0.44	0.406	0.367	0.324	0.27	0.21	0.138	0.124	0.11	0.095	0.082	
7	0.01	0.334	0.294	0.258	0.211	0.166	0.11	0.058	0.05	0.041	0.032	0.024	
	0.05	0.373	0.337	0.297	0.254	0.203	0.146	0.085	0.074	0.062	0.05	0.041	
	0.1	0.396	0.36	0.32	0.276	0.224	0.168	0.102	0.089	0.076	0.064	0.053	
8	0.01	0.297	0.258	0.22	0.177	0.132	0.087	0.04	0.032	0.026	0.018	0.014	
	0.05	0.334	0.299	0.259	0.214	0.166	0.114	0.059	0.05	0.041	0.032	0.024	
	0.1	0.355	0.32	0.278	0.236	0.186	0.132	0.072	0.062	0.051	0.042	0.032	
9	0.01	0.264	0.228	0.19	0.149	0.108	0.066	0.026	0.02	0.014	
	0.05	0.299	0.263	0.223	0.181	0.137	0.089	0.041	0.033	0.026	
	0.1	0.319	0.284	0.243	0.202	0.154	0.103	0.051	0.042	0.034	
10	0.01	0.235	0.2	0.164	0.124	0.087	0.05	0.017	

0.05	0.268	0.233	0.195	0.154	0.112	0.68	0.28
0.1	0.287	0.252	0.212	0.172	0.128	0.83	0.35

جدول ۴- ادامه

k	<i>n</i>	نام												
		α	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
1	0.01	0.404	0.374	0.337	0.311	0.274	0.235	0.197	0.156	0.11	68	0.29	0.4	
	0.05	0.503	0.479	0.453	0.423	0.39	0.353	0.31	0.262	0.207	0.145	0.81	0.25	0.1
	0.1	0.556	0.534	0.51	0.482	0.451	0.415	0.374	0.326	0.27	0.203	0.127	0.49	0.3
2	0.01	0.238	0.207	0.181	0.159	0.134	0.101	0.78	0.5	0.28	0.12	0.2	...	
	0.05	0.317	0.293	0.262	0.234	0.204	0.172	0.137	0.99	0.65	0.34	0.1	0.1	...
	0.1	0.36	0.337	0.309	0.278	0.25	0.214	0.175	0.137	0.94	0.56	0.22	0.2	...
3	0.01	0.146	0.123	0.103	0.83	0.64	0.44	0.26	0.14	0.6	0.1	
	0.05	0.206	0.179	0.156	0.133	0.107	0.83	0.57	0.34	0.16	0.4
	0.10	0.24	0.216	0.189	0.162	0.138	0.108	0.8	0.53	0.27	0.9
4	0.01	0.9	0.72	0.56	0.42	0.3	0.18	0.9	0.4
	0.05	0.134	0.112	0.92	0.73	0.55	0.37	0.21	0.1
	0.1	0.16	0.138	0.116	0.94	0.73	0.52	0.32	0.16
5	0.01	0.54	0.42	0.31	0.2	0.12	0.6
	0.05	0.84	0.68	0.53	0.39	0.26	0.14
	0.1	0.105	0.86	0.68	0.52	0.36	0.22
6	0.01	0.32	0.22	0.14	0.8
	0.05	0.52	0.39	0.28	0.18
	0.1	0.67	0.52	0.38	0.26
7	0.01	0.18	0.12
	0.05	0.3	0.21
	0.1	0.4	0.29
8	0.01
	0.05
	0.1
9	0.01
	0.05
	0.1
10	0.01
	0.05
	0.1

۶- سپس به موردنی که ممکن است بزرگترین و کوچکترین مشاهده‌ها را به عنوان داده‌های دورافتاده احتمالی داشته باشیم می‌پردازیم. در اینجا از آزمون گرابس (به کتابنامه ۵ و ۱۰ مراجعه شود) که بر اساس مجموع مربعات نمونه وقتی که دو مقدار مشکوک حذف شده‌اند نسبت به مجموع مربعات نمونه وقتی که مقادیر مشکوک حذف نشده‌اند، استفاده می‌کنیم. اگر

الزام اولیه سادگی در محاسبات باشد، در آن صورت آزمون دیکسون (حذف واقعی یک مشاهده در نمونه) می‌تواند در این مورد استفاده شود. در ادامه مثال‌های ۴ و ۵ به منظور تشریح روش آزمون ارائه شده‌اند:

۱-۹-۶ مثال ۴ در یک مقایسه از استحکام مواد پلاستیکی متنوع، یک ویژگی بررسی شده درصد ازدیاد طول (کشیدگی) در شکستگی بود. قبل از مطالعه ازدیاد طول میانگین مواد مختلف، بهتر بود هر قسمت از ماده مورد نظر که در مقایسه با بقیه بخش‌های نمونه، افزایش طول خیلی کمی در شکست نشان می‌دهد برای بررسی‌های بیشتر جدا گردد. در این مثال توجه اصلی شخص برای بررسی ممکن است فقط به داده‌های دورافتاده سمت چپ میانگین باشد چون خوانش‌های خیلی بالا بیانگر افزایش شکل‌پذیری (خاصیت پلاستیکی) هستند که یک ویژگی مطلوب است.

۱-۹-۶ ده اندازه‌گیری درصد افزایش طول در شکستگی به دست آمده از ماده شماره ۲۳ عبارت‌اند از: ۳/۹۴، ۳/۵۹، ۳/۷۳، ۳/۰۴، ۴/۱۳



شکل ۳- ده اندازه‌گیری درصد ازدیاد طول در شکستگی برای مثال ۴

۴/۱۱، ۴/۰۵، ۲/۲۳، ۴/۰۲، ۲/۰۲، شکل ۳ را مشاهده نمایید. با منظم کردن بر اساس مرتبه بزرگی این اندازه‌گیری‌ها عبارت‌اند از ۳/۰۴، ۳/۰۲، ۳/۷۳، ۳/۵۹، ۴/۱۳، ۴/۱۱، ۳/۹۴، ۲/۲۲، ۲/۰۲. خوانش‌های سؤال برانگیز دو خوانش کمترین، ۲/۰۲ و ۲/۲۲ هستند. می‌توانیم این دو خوانش پایین را به صورت همزمان با استفاده از رابطه زیر از جدول ۵ مورد آزمون قرار می‌گیرند.

$$s_{1,2}^2 / s^2$$

برای اندازه‌گیری بالا:

$$\begin{aligned} s^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= [n \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - (\sum x_i)^2] / n \\ &= [10(121.3594) - (34.06)^2] / 10 \\ &= 5.351 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{1,2}^2 &= \sum_{i=3}^n (x_i - \bar{x}_{1,2})^2 \\ &= [(n-1) \sum_{i=3}^n x_i^2 - (\sum_{i=3}^n x_i)^2] / (n-2) \\ &= [8(112.3506) - (29.82)^2] / 8 \\ &= 9.5724 / 8 \\ &= 1.197 \end{aligned}$$

درجایی که

$$\bar{x}_{1,2} = \sum_{i=3}^n x_{i/(n-2)}$$

در می‌باییم که:

$$\frac{s_{1,2}^2}{s^2} = \frac{1.197}{5.351} = 0.224$$

از جدول ۵ برای $n=10$ سطح اهمیت ۵٪ برای $s_{1,2}^2/s^2$ برابر با 0.2305 است. چون مقدار محاسبه شده از مقدار بحرانی کوچکتر است درنتیجه هر دو مقدار $2/0.2$ و $2/22$ داده‌های دورافتاده می‌باشند. در موردی نظیر آنچه در این مثال تشریح گردید، جایی که داده‌های دورافتاده برای تجزیه و تحلیل بیشتر جدا می‌شوند احتمالاً یک سطح اهمیت به بزرگی ۵٪ یا شاید حتی 10% استفاده خواهد شد تا یک اندازه معقول از نمونه برای مطالعات بیشتر به دست آید. ممکن است بنابر ملاحظات اقتصادی مجبور به استفاده از احتمال، به عنوان مبنایی منطقی برای اقدام، بشویم.

۲-۹-۶ مثال ۵- دامنه‌های زیر (فواصل افقی از دهانه تنگ تا نقطه برخورد مردمی بر اساس کیلومتر) در شلیک از یک سلاح در یک زاویه ثابت از ارتفاع و در وزن‌های مشابه از خروج به دست آمده‌اند.

فواصل بر حسب کیلومتر

۴۷۸۲	۴۴۲۰
۴۸۳۸	۴۸۰۳
۴۷۶۵	۴۷۳۰
۴۵۴۹	۴۸۳۳

۱-۲-۶ هدف قضاوت درباره این است که آیا مردمی‌ها رفتار بالستیکی یکسانی نمایش می‌دهند یا اینکه برخی از دامنه‌ها نسبت به دیگران تنافض دارند. مقادیر مشکوک دو دامنه کوچک‌ترین $4/0.416$ و $4/1596$ هستند. برای آزمون این دو داده دورافتاده‌ی مشکوک رابطه آماری $s_{1,2}^2/s^2$ از جدول ۵ احتمالاً بهترین رابطه برای استفاده است.

یادآوری - کودو^۱ (۱۱) نشان می‌دهد که اگر دو داده دورافتاده به علت جابجایی در مکان یا سطح باشند (در مقایسه با مقدار σ ، معیار نمونه بهینه برای آزمون در مثال ۵ از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$\min(2\bar{x} - x_i - x_j)/s = (2\bar{x} - x_1 - x_2)/s$$

۶-۹-۲-۲ این فواصل منظم شده بر اساس افزایش در مرتبه بزرگی عبارت‌اند از:

فاصله بر حسب کیلومتر

۴۴۲۰	۴۷۸۲
۴۵۴۹	۴۸۰۳
۴۷۳۰	۴۸۳۳
۴۷۶۵	۴۸۳۸

جدول ۵- مقادیر بحرانی برای $s_{1,2}^2 \cdot s^2$ یا $s_{n-1,n}^2 \cdot s^2$ برای آزمون همزمان دو بزرگ‌ترین یا دو کوچک‌ترین مشاهده‌ها

مشاهده <i>n</i>	سطح اهمیت 0.1% کمتر از	سطح اهمیت 0.5% کمتر از	سطح اهمیت 1% کمتر از	سطح اهمیت 2.5% کمتر از	سطح اهمیت 5% کمتر از	سطح اهمیت 10% کمتر از
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0031
5	0.0003	0.0018	0.0035	0.0090	0.0183	0.0376
6	0.0039	0.0116	0.0186	0.0349	0.0564	0.0920
7	0.0135	0.0308	0.0440	0.0708	0.1020	0.1479
8	0.0290	0.0563	0.0750	0.1101	0.1478	0.1994
9	0.0489	0.0851	0.1082	0.1492	0.1909	0.2454
10	0.0714	0.1150	0.1414	0.1864	0.2305	0.2863
11	0.0953	0.1448	0.1736	0.2213	0.2667	0.3227
12	0.1198	0.1738	0.2043	0.2537	0.2996	0.3552
13	0.1441	0.2016	0.2333	0.2836	0.3295	0.3843
14	0.1680	0.2280	0.2605	0.3112	0.3568	0.4106
15	0.1912	0.2530	0.2859	0.3367	0.3818	0.4345
16	0.2136	0.2767	0.3098	0.3603	0.4048	0.4562
17	0.2350	0.2990	0.3321	0.3822	0.4259	0.4761
18	0.2556	0.3200	0.3530	0.4025	0.4455	0.4944
19	0.2752	0.3398	0.3725	0.4214	0.4636	0.5113
20	0.2939	0.3585	0.3909	0.4391	0.4804	0.5270
21	0.3118	0.3761	0.4082	0.4556	0.4961	0.5415
22	0.3288	0.3927	0.4245	0.4711	0.5107	0.5550
23	0.3450	0.4085	0.4398	0.4857	0.5244	0.5677
24	0.3605	0.4234	0.4543	0.4994	0.5373	0.5795
25	0.3752	0.4376	0.4680	0.5123	0.5495	0.5906
26	0.3893	0.4510	0.4810	0.5245	0.5609	0.6011
27	0.4027	0.4638	0.4933	0.5360	0.5717	0.6110

جدول ٥ - اداءه

28	0.4156	0.4759	0.5050	0.5470	0.5819	0.6203
29	0.4279	0.4875	0.5162	0.5574	0.5916	0.6292
30	0.4397	0.4985	0.5268	0.5672	0.6008	0.6375
31	0.4510	0.5091	0.5369	0.5766	0.6095	0.6455
32	0.4618	0.5192	0.5465	0.5856	0.6178	0.6530
33	0.4722	0.5288	0.5557	0.5941	0.6257	0.6602
34	0.4821	0.5381	0.5646	0.6023	0.6333	0.6671
35	0.4917	0.5469	0.5730	0.6101	0.6405	0.6737
36	0.5009	0.5554	0.5811	0.6175	0.6474	0.6800
37	0.5098	0.5636	0.5889	0.6247	0.6541	0.6860
38	0.5184	0.5714	0.5963	0.6316	0.6604	0.6917
39	0.5266	0.5789	0.6035	0.6382	0.6665	0.6972
40	0.5345	0.5862	0.6104	0.6445	0.6724	0.7025
41	0.5422	0.5932	0.6170	0.6506	0.6780	0.7076
42	0.5496	0.5999	0.6234	0.6565	0.6834	0.7125
43	0.5568	0.6064	0.6296	0.6621	0.6886	0.7172
44	0.5637	0.6127	0.6355	0.6676	0.6936	0.7218
45	0.5704	0.6188	0.6412	0.6728	0.6985	0.7261
46	0.5768	0.6246	0.6468	0.6779	0.7032	0.7304
47	0.5831	0.6303	0.6521	0.6828	0.7077	0.7345
48	0.5892	0.6358	0.6573	0.6876	0.7120	0.7384
49	0.5951	0.6411	0.6623	0.6921	0.7163	0.7422
50	0.6008	0.6462	0.6672	0.6966	0.7203	0.7459
51	0.6063	0.6512	0.6719	0.7009	0.7243	0.7495
52	0.6117	0.6560	0.6765	0.7051	0.7281	0.7529
53	0.6169	0.6607	0.6809	0.7091	0.7319	0.7563
54	0.6220	0.6653	0.6852	0.7130	0.7355	0.7595
55	0.6269	0.6697	0.6894	0.7168	0.7390	0.7627
56	0.6317	0.6740	0.6934	0.7205	0.7424	0.7658
57	0.6364	0.6782	0.6974	0.7241	0.7456	0.7687
58	0.6410	0.6823	0.7012	0.7276	0.7489	0.7716
59	0.6454	0.6862	0.7049	0.7310	0.7520	0.7744
60	0.6497	0.6901	0.7086	0.7343	0.7550	0.7772
61	0.6539	0.6938	0.7121	0.7375	0.758	0.7798
62	0.658	0.6975	0.7155	0.7406	0.7608	0.7824
63	0.662	0.701	0.7189	0.7437	0.7636	0.785
64	0.6658	0.7045	0.7221	0.7467	0.7664	0.7874
65	0.6696	0.7079	0.7253	0.7496	0.769	0.7898
66	0.6733	0.7112	0.7284	0.7524	0.7716	0.7921

جدول ٥ - ادامه

67	0.677	0.7144	0.7314	0.7551	0.7741	0.7944
68	0.6805	0.7175	0.7344	0.7578	0.7766	0.7966
69	0.6839	0.7206	0.7373	0.7604	0.779	0.7988
70	0.6873	0.7236	0.7401	0.763	0.7813	0.8009
71	0.6906	0.7265	0.7429	0.7655	0.7836	0.803
72	0.6938	0.7294	0.7455	0.7679	0.7859	0.805
73	0.697	0.7322	0.7482	0.7703	0.7881	0.807
74	0.7	0.7349	0.7507	0.7727	0.7902	0.8089
75	0.7031	0.7376	0.7532	0.7749	0.7923	0.8108
76	0.706	0.7402	0.7557	0.7772	0.7944	0.8127
77	0.7089	0.7427	0.7581	0.7794	0.7964	0.8145
78	0.7117	0.7453	0.7605	0.7815	0.7983	0.8162
79	0.7145	0.7477	0.7628	0.7836	0.8002	0.818
80	0.7172	0.7501	0.765	0.7856	0.8021	0.8197
81	0.7199	0.7525	0.7672	0.7876	0.804	0.8213
82	0.7225	0.7548	0.7694	0.7896	0.8058	0.823
83	0.725	0.757	0.7715	0.7915	0.8075	0.8245
84	0.7275	0.7592	0.7736	0.7934	0.8093	0.8261
85	0.73	0.7614	0.7756	0.7953	0.8109	0.8276
86	0.7324	0.7635	0.7776	0.7971	0.8126	0.8291
87	0.7348	0.7656	0.7796	0.7989	0.8142	0.8306
88	0.7371	0.7677	0.7815	0.8006	0.8158	0.8321
89	0.7394	0.7697	0.7834	0.8023	0.8174	0.8335
90	0.7416	0.7717	0.7853	0.804	0.819	0.8349
91	0.7438	0.7736	0.7871	0.8057	0.8205	0.8362
92	0.7459	0.7755	0.7889	0.8073	0.822	0.8376
93	0.7481	0.7774	0.7906	0.8089	0.8234	0.8389
94	0.7501	0.7792	0.7923	0.8104	0.8248	0.8402
95	0.7522	0.781	0.794	0.812	0.8263	0.8414
96	0.7542	0.7828	0.7957	0.8135	0.8276	0.8427
97	0.7562	0.7845	0.7973	0.8149	0.829	0.8439
98	0.7581	0.7862	0.7989	0.8164	0.8303	0.8451
99	0.76	0.7879	0.8005	0.8178	0.8316	0.8463
100	0.7619	0.7896	0.802	0.8192	0.8329	0.8475
101	0.7637	0.7912	0.8036	0.8206	0.8342	0.8486
102	0.7655	0.7928	0.8051	0.822	0.8354	0.8497
103	0.7673	0.7944	0.8065	0.8233	0.8367	0.8508
104	0.7691	0.7959	0.808	0.8246	0.8379	0.8519
105	0.7708	0.7974	0.8094	0.8259	0.8391	0.853

جدول - ٥ - ادامه

106	0.7725	0.7989	0.8108	0.8272	0.8402	0.8541
107	0.7742	0.8004	0.8122	0.8284	0.8414	0.8551
108	0.7758	0.8018	0.8136	0.8297	0.8425	0.8563
109	0.7774	0.8033	0.8149	0.8309	0.8436	0.8571
110	0.779	0.8047	0.8162	0.8321	0.8447	0.8581
111	0.7806	0.8061	0.8175	0.8333	0.8458	0.8591
112	0.7821	0.8074	0.8188	0.8344	0.8469	0.86
113	0.7837	0.8088	0.82	0.8356	0.8479	0.861
114	0.7852	0.8101	0.8213	0.8367	0.8489	0.8619
115	0.7866	0.8114	0.8225	0.8378	0.85	0.8628
116	0.7881	0.8127	0.8237	0.8389	0.851	0.8637
117	0.7895	0.8139	0.8249	0.84	0.8519	0.8646
118	0.7909	0.8152	0.8261	0.841	0.8529	0.8655
119	0.7923	0.8164	0.8272	0.8421	0.8539	0.8664
120	0.7937	0.8176	0.8284	0.8431	0.8548	0.8672
121	0.7951	0.8188	0.8295	0.8441	0.8557	0.8681
122	0.7964	0.82	0.8306	0.8451	0.8567	0.8689
123	0.7977	0.8211	0.8317	0.8461	0.8576	0.8697
124	0.799	0.8223	0.8327	0.8471	0.8585	0.8705
125	0.8003	0.8234	0.8338	0.848	0.8593	0.8713
126	0.8016	0.8245	0.8348	0.849	0.8602	0.8721
127	0.8028	0.8256	0.8359	0.8499	0.8611	0.8729
128	0.8041	0.8267	0.8369	0.8508	0.8619	0.8737
129	0.8053	0.8278	0.8379	0.8517	0.8627	0.8744
130	0.8065	0.8288	0.8389	0.8526	0.8636	0.8752
131	0.8077	0.8299	0.8398	0.8535	0.8644	0.8759
132	0.8088	0.8309	0.8408	0.8544	0.8652	0.8766
133	0.81	0.8319	0.8418	0.8553	0.866	0.8773
134	0.8111	0.8329	0.8427	0.8561	0.8668	0.878
135	0.8122	0.8339	0.8436	0.857	0.8675	0.8787
136	0.8134	0.8349	0.8445	0.8578	0.8683	0.8794
137	0.8145	0.8358	0.8454	0.8586	0.869	0.8801
138	0.8155	0.8368	0.8463	0.8594	0.8698	0.8808
139	0.8166	0.8377	0.8472	0.8602	0.8705	0.8814
140	0.8176	0.8387	0.8481	0.861	0.8712	0.8821
141	0.8187	0.8396	0.8489	0.8618	0.872	0.8827
142	0.8197	0.8405	0.8498	0.8625	0.8727	0.8834
143	0.8207	0.8414	0.8506	0.8633	0.8734	0.884
144	0.8218	0.8423	0.8515	0.8641	0.8741	0.8846

جدول ۵- ادامه

145	0.8227	0.8431	0.8523	0.8648	0.8747	0.8853
146	0.8237	0.844	0.8531	0.8655	0.8754	0.8859
147	0.8247	0.8449	0.8539	0.8663	0.8761	0.8865
148	0.8256	0.8457	0.8547	0.867	0.8767	0.8871
149	0.8266	0.8465	0.8555	0.8677	0.8774	0.8877

$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$s_{1,2}^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_{1,2})^2$$

$$\bar{x}_{1,2}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=3}^n x_i$$

$$s_{n-1,n}^2 = \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - \bar{x}_n - 1, n)^2$$

$$\bar{x}_{n-1,n}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} x_i$$

مقدار s^2 ، ۱۵۸۵۹۲ است. حذف دو دامنه کوچک‌تر ۴/۰۴۱۶ و ۴/۱۵۹۶ و محاسبه مجدد، $S_{1,2}$ برابر با ۵۸۹۰/۸ را به دست می‌دهد. بنابراین

$$\frac{s_{1,2}^2}{s^2} = \frac{5890.8}{158592} = 0.054$$

که در سطح ۰/۰۱ معنی‌دار است (به جدول ۵ مراجعه کنید). بنابراین بسیار بعيد است که دو دامنه کوچک‌تر (علاوه بر خداده از انحراف بیش‌از حد) از جمعیت مشابه آن که نماینده ۶ دامنه دیگر است آمده باشد. این نکته که مقادیر بحرانی در جدول ۵ برای سطح اهمیت ۱٪ کوچک‌تر از مقادیر ۵٪ آن می‌باشد باید موردنظر قرار گیرد. بنابراین برای این آزمون خاص، مقدار محاسبه شده اگر کمتر از مقدار بحرانی انتخاب شده باشد، معنی‌دار است.

۶-۱۰ به وسیله روش‌های مونت‌کارلو و با استفاده از یک ماشین حساب مهندسی، تای جن و مور (به بند ۷ کتاب نامه مراجعه شود) جداول نقاط درصد برای دو مشاهده بزرگ‌تر و کوچک‌تر برای بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین مقادیر نمونه به ازای $K > 2$ را بسط دادند، نتایج آن‌ها در جدول ۶ آورده شده است. جایی که

$$L_k = \left[\sum_{i=1}^{n-k} (x_i - \bar{x}_k)^2 / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]$$

و

$$\bar{x}_k = \sum_{i=1}^{n-k} x_i / n - k$$

جدول ۶- مقادیر بحرانی L_k برای آزمون- یک طرفه) $\times 1000$

k	n													
		α	50	45	40	35	30	25	20	19	18	17	16	15
1	0.01	0.768	0.745	0.722	0.69	0.65	0.607	0.539	0.522	0.504	0.485	0.463	0.44	
	0.025	0.796	0.776	0.756	0.732	0.699	0.654	0.594	0.579	0.562	0.544	0.525	0.503	
	0.05	0.82	0.802	0.784	0.762	0.73	0.692	0.638	0.624	0.61	0.593	0.576	0.556	
2	0.1	0.84	0.826	0.812	0.792	0.766	0.732	0.685	0.673	0.66	0.646	0.631	0.613	
	0.01	0.667	0.641	0.61	0.573	0.527	0.468	0.391	0.373	0.353	0.332	0.31	0.286	
	0.025	0.697	0.667	0.644	0.61	0.567	0.512	0.439	0.421	0.403	0.382	0.36	0.337	
3	0.05	0.72	0.698	0.673	0.641	0.601	0.55	0.48	0.464	0.446	0.426	0.405	0.382	
	0.1	0.746	0.726	0.702	0.674	0.637	0.591	0.527	0.511	0.494	0.476	0.456	0.435	
	0.01	0.592	0.558	0.522	0.484	0.434	0.377	0.3	0.272	0.26	0.237	0.219	0.194	
4	0.025	0.622	0.592	0.561	0.527	0.479	0.417	0.341	0.321	0.299	0.282	0.261	0.239	
	0.05	0.646	0.618	0.588	0.554	0.506	0.45	0.377	0.354	0.337	0.322	0.3	0.276	
	0.1	0.673	0.648	0.622	0.586	0.523	0.489	0.42	0.398	0.384	0.364	0.342	0.322	
5	0.01	0.531	0.498	0.46	0.418	0.369	0.308	0.231	0.211	0.192	0.171	0.151	0.132	
	0.025	0.559	0.529	0.491	0.455	0.408	0.342	0.265	0.243	0.226	0.208	0.185	0.167	
	0.05	0.588	0.556	0.523	0.482	0.434	0.374	0.299	0.277	0.259	0.24	0.219	0.197	
6	0.1	0.614	0.586	0.554	0.516	0.472	0.412	0.339	0.316	0.302	0.282	0.26	0.236	
	0.01	0.483	0.444	0.408	0.364	0.312	0.246	0.175	0.154	0.14	0.126	0.108	0.9	
	0.025	0.51	0.473	0.433	0.398	0.352	0.282	0.209	0.189	0.171	0.151	0.135	0.113	
7	0.05	0.535	0.502	0.468	0.424	0.376	0.312	0.238	0.217	0.2	0.181	0.159	0.14	
	0.1	0.562	0.533	0.499	0.458	0.411	0.35	0.273	0.251	0.236	0.216	0.194	0.172	
	0.01	0.438	0.399	0.364	0.321	0.268	0.204	0.136	0.118	0.104	0.91	0.72	0.57	
8	0.025	0.466	0.43	0.387	0.348	0.302	0.233	0.165	0.145	0.129	0.117	0.96	0.78	
	0.05	0.49	0.456	0.421	0.376	0.327	0.262	0.188	0.168	0.154	0.136	0.115	0.97	
	0.1	0.518	0.488	0.451	0.41	0.359	0.296	0.22	0.199	0.184	0.165	0.144	0.124	
9	0.01	0.4	0.361	0.324	0.282	0.229	0.168	0.104	0.88	0.76	0.64	0.49	0.37	
	0.025	0.428	0.391	0.348	0.308	0.261	0.192	0.128	0.108	0.95	0.82	0.65	0.51	
	0.05	0.45	0.417	0.378	0.334	0.283	0.222	0.15	0.13	0.116	0.1	0.82	0.66	
10	0.1	0.477	0.447	0.408	0.365	0.316	0.251	0.176	0.158	0.142	0.125	0.104	0.86	
	0.01	0.368	0.328	0.292	0.25	0.196	0.144	0.78	0.64	0.53	0.44	0.3	...	
	0.025	0.392	0.356	0.314	0.274	0.226	0.159	0.98	0.8	0.68	0.58	0.45	...	

جدول ۶ - ادامه

k	n												
		α	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
1	0.01	0.414	0.386	0.355	0.321	0.283	0.241	0.195	0.145	0.93	0.44	0.1	...
	0.05	0.479	0.453	0.423	0.39	0.353	0.31	0.262	0.207	0.145	0.81	0.25	0.1
	0.1	0.534	0.51	0.482	0.451	0.415	0.374	0.326	0.27	0.203	0.127	0.49	3
2	0.01	0.594	0.573	0.548	0.52	0.488	0.45	0.405	0.35	0.283	0.199	0.98	0.11
	0.05	0.261	0.233	0.204	0.174	0.141	0.108	0.75	0.44	0.19	0.4
	0.1	0.311	0.284	0.254	0.221	0.186	0.149	0.11	0.71	0.35	0.9
3	0.01	0.357	0.33	0.3	0.267	0.23	0.191	0.148	0.102	0.56	0.18	0.1	...
	0.05	0.411	0.384	0.355	0.323	0.286	0.245	0.199	0.148	0.92	0.38	0.3	...
	0.10	0.172	0.147	0.12	0.098	0.07	0.048	0.028	0.01	0.2
4	0.01	0.214	0.184	0.162	0.129	0.1	0.073	0.045	0.021	0.5
	0.05	0.25	0.224	0.196	0.162	0.129	0.099	0.064	0.032	0.1
	0.1	0.298	0.27	0.24	0.208	0.17	0.134	0.095	0.056	0.2
5	0.01	0.113	0.094	0.07	0.052	0.032	0.018	0.08
	0.05	0.145	0.122	0.096	0.074	0.052	0.03	0.013
	0.1	0.174	0.15	0.125	0.098	0.07	0.045	0.022
6	0.01	0.212	0.186	0.159	0.128	0.098	0.068	0.038
	0.05	0.72	0.56	0.38	0.26	0.12
	0.1	0.95	0.77	0.57	0.4	0.23
7	0.01	0.122	0.098	0.076	0.054	0.034
	0.05	0.15	0.126	0.103	0.074	0.051
	0.1	0.46	0.33	0.19
8	0.01	0.63	0.47	0.31
	0.05	0.79	0.6	0.42
	0.1	0.104	0.82	0.62
9	0.01	0.27
	0.05	0.38
	0.1	0.5
10	0.01	0.68
	0.05
	0.1

ملاحظه کنید که L_2 آنها برابر با $S^2/S_{n,n-1}^2$ است. برای $K=1$ مقادیر بحرانی آنها با مقدار دقیق محاسبه شده توسط گرباس (۱۹۵۰) مطابقت دارد. این جدول جدید می‌تواند برای استفاده در بسیاری از مشکلات عملی مورد نظر مفید باشد.

۱۱-۶ اگر سادگی محاسبات بسیار مهم باشد، یا اگر تعداد زیادی از نمونه‌ها باید به صورت انفرادی برای داده‌های دورافتاده، مورد آزمون قرار گیرند، مشاهده‌ها سؤال برانگیز می‌توانند با معیار دیکسون آزمون شوند. با اعتنا نکردن به پایین ترین دامنه، ۴/۰۴۱۶ کمترین دامنه بعد از آن، ۴/۳۲۵۱ را جهت داده دورافتاده می‌آزماییم. برای $n=7$ از جدول ۲ مشاهده می‌کنیم که r_{10} رابطه آماری مناسبی است. دامنه‌ها را از x_7 تا x_1 مرتب کنید و با دامنه ۴/۱۵۹۶ شروع کنید.

متوجه می‌شویم

$$r_{10} = (x_2 - x_1) / (x_7 - x_1) \\ (4.3251 - 4.1596) / (4.4239 - 4.1596) \\ \frac{(0.165)}{(0.264)} = 0.626$$

که فقط اندکی کمتر از مقدار بحرانی ۱٪، یعنی $n=7$ برای $x_7 - x_1 = 0.637$ می‌باشد. بنابراین اگر آزمون به هر سطح اهمیت بالاتر از سطح ۱٪ معطوف شود، نتیجه می‌گیریم که $1596.4 \leq b_1 \leq 1600$ یک داده دورافتاده است. از آنجاکه کمترین مقدار از دسته دامنه‌های اصلی، $416.4 \leq b_1 \leq 420$ حتی از داده‌هایی که آزمایش کردیم دورافتاده‌تر است، آن را می‌توان بدون آزمایش بیشتر در داده‌های دورافتاده دسته‌بندی کرد. لازم به ذکر است، که در این آزمون از همه مشاهده‌ها نمونه استفاده نشد.

۱۲-۶

رد داده‌های دورافتاده متعدد

تاکنون درباره روش‌های تشخیص یک یا دو داده دورافتاده در یک نمونه مشابه بحث کردیم، اما این تکنیک‌ها عموماً برای عدم پذیرش مکرر توصیه نمی‌شود، چون اگر چندین داده دورافتاده در یک نمونه وجود دارد تشخیص یک یا دو مقدار داده نادرست می‌تواند توسط حضور دیگر مشاهده‌ها مغایر پوشیده شود. مشاهده‌ها دورافتاده به دلیل جابجایی در سطح (یا میانگین) یا تغییر در مقیاس (یعنی تغییر در واریانس مشاهده‌ها) یا هر دو اتفاق می‌افتد. فرگوسن (به کتابنامه ۳ و ۴ مراجعه کنید) درباره قدرت قوانین مردود سازی گوناگون نسبت به تغییرات در سطح یا مقیاس، مطالعه کرده است.

برای چندین داده دورافتاده و عدم پذیرش‌های مکرر مشاهده‌ها، فرگوسن نشان داد که ضریب چولگی نمونه

$$\sqrt{b_1} = \sqrt{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 / (n - 1)^{3.2} S^3 \\ = \sqrt{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 / \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{3.2}$$

باید برای آزمون‌های یکطرفه (تغییر در سطح چندین مشاهده در یک جهت) استفاده شود و ضریب کشیدگی (درجه اوج در نمودارهای آماری) نمونه

$$b_2 = n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 / (n - 1)^2 S^4 \\ = n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 / \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^2$$

برای آزمون‌های دوطرفه (تغییرات در سطح به مقادیر بالاتر و پایین‌تر) همچنین برای تغییرات در مقیاس (واریانس) توصیه می‌شود (تذکر ۵ را ببینید). برای استفاده از آزمون‌های بالا $b_2 \geq \sqrt{b_1}$ یا $b_2 \geq 2$ یا هر دو محاسبه می‌شوند و اگر مقادیر

مشاهده شده آنها از سطوح اهمیت آنها که در جداول ۷، ۸ داده شده بیشتر باشد بنابراین دورترین مشاهده از مقدار میانگین رد می‌شود و رویه مشابه تکرار می‌شود تا دورترین مقادیر نمونه دیگری به عنوان داده دورافتاده شناخته نشوند (همان طور که به خوبی می‌دانید $\sqrt{b_1}$ یا b_2 همچنین به عنوان آزمون‌های حالت عادی استفاده می‌شوند).

یادآوری: در معادلات بالا برای $\sqrt{b_1}$ و b_2 همان‌گونه که در این استاندارد استفاده می‌شود تعریف شده است.

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2/n}{(n-1)}}$$

۱-۱۲-۶ این سطوح اهمیت برای جداول ۷، ۸ برای اندازه نمونه ۵، ۱۰، ۱۵ و ۲۰ (و ۲۵ برای b_2) توسط فرگوسن بر روی یک کامپیوتر IBM 704 با استفاده از یک آزمون نمونه‌برداری یا روش مونت‌کارلو به دست آمد. سطوح اهمیت برای دیگر اندازه‌های نمونه از پرسون، ای.اس^۱ هستند، "جدول نقاط درصد $\sqrt{b_1}$ یا b_2 در نمونه‌های عادی گرد کردن" ۱۹۶۵، Vol 52، Biometrika pp 282-285

۲-۱۲-۶ روابط آماری $\sqrt{b_1}$ یا b_2 برخلاف گزینه‌های یک‌طرفه و دوطرفه به ترتیب یک ویژگی مطلوب دارند و آن منطقه‌ای بودن آن‌هاست. آزمون $\sqrt{b_1}$ برای تا ۵٪ مشاهده‌ها نادرست در نمونه برای مورد یک‌سویه مناسب است و آزمون b_2 برای انتخاب‌های دوسویه برای تا ۲۱٪ آلاینده‌های مقادیر نمونه مناسب است. برای فقط یک یا دو داده دورافتاده روابط آماری نمونه از پاراگراف‌های قبلی توصیه می‌شوند و فرگوسن (۳) به طور مفصل در مورد ویژگی‌های بهینه نشان دادن یک یا دو داده دورافتاده بحث می‌کند.

۳-۱۲-۶ به جای استفاده از روابط پیچیده $\sqrt{b_1}$ و b_2 شخص می‌تواند از جداول ۴ و ۵ برای اندازه‌های نمونه و نقاط درصد داده شده استفاده کند.

۷ روابط آماری توصیه شده با استفاده از انحراف استاندارد مستقل

۱-۷ فرض کنید که یک تخمین مستقل از انحراف استاندارد از داده‌های قبلی موجود است. این تخمین ممکن است از یک نمونه تک از داده‌های مشابه قبلی باشد یا می‌تواند نتیجه ترکیب تخمین‌های چندین سری از داده‌های قبلی باشد. در هر صورت گفته شده که هر تخمین، درجه آزادی معادل یک واحد کمتر از اندازه نمونه مربوطه دارد. تخمین مرکب مناسب یک میانگین وزنی از چندین مقدار^۲ است و وزن‌ها متناسب با درجات آزادی مربوطه می‌باشند. آنگاه درجات

آزادی کل در تخمین مرکب برابر است با مجموع درجات آزادی منفرد. وقتی شخص از یک تخمین مستقل از انحراف استاندارد S استفاده می‌کند ضوابط آزمون پیشنهادشده در اینجا به صورت زیر است:

$$\hat{T}_1 = (\bar{x} - x_1) / S$$

یا

$$\hat{T}_n = (x_n' - \bar{x}) / S_v$$

که تعداد کل درجات آزادی است.

۲-۷ مقادیر بحرانی برای \hat{T}_n برای سطوح اهمیت ۱٪ و ۵٪ مربوط به دیوید^۱ (۱۲) هستند و در جدول ۹ آورده شده‌اند. در جدول ۹ زیرنویس $df = n$ نشان‌دهنده درجه آزادی کل مربوط به تخمین مستقل از انحراف استاندارد S و n بیانگر تعداد مشاهده‌ها در نمونه تحت مطالعه است. وقتی جدول ۹ مقادیر دلخواه v و یا n را از قلم انداخته باشد کاربر می‌تواند از مقادیر نزدیک به آن‌ها استفاده کند. همچنین کاربر می‌تواند از راه ساده کننده و محتاطانه‌تر استفاده کند و مقادیر بحرانی مجاور بالاتر را انتخاب کند. با یک مثال بر آزمون‌های بین آزمایشگاهی این مطلب را شرح می‌دهیم.

جدول ۷- حدود اهمیت (آزمون-یک‌طرفه) برای $\sqrt{b_1}$

n	سطح اهمیت (درصد)									
	5	10	15	20	25	30	35	40	50	60
1	1.34	1.31	1.20	1.11	1.06	0.98	0.92	0.87	0.79	0.72
5	1.05	0.92	0.84	0.79	0.71	0.66	0.62	0.59	0.53	0.49

جدول ۸- حدود اهمیت (آزمون-یک‌طرفه) برای b_2

n	سطح اهمیت (درصد)							
	5	10	15	20	25	50	75	100
1	3.11	4.83	5.08	5.23	5.00	4.88	4.59	4.39
5	2.89	3.85	4.07	4.15	4.00	3.99	3.87	3.77

۳-۷ مثال ۶ آزمون‌های بین آزمایشگاهی- در یک تحلیل از روش‌های آزمون بین آزمایشگاهی، داده‌ها نماینده نرمالیته محلول‌های سدیم هیدروکسید هستند که توسط ۱۲ آزمایشگاه مختلف اندازه‌گیری شده‌اند. در همه استانداردسازی‌ها، یک محلول سدیم هیدروکسید $N/10$ توسط کمیته روش‌های استاندارد با استفاده از آب م قطر بدون دی‌اکسید کربن تهیه شد. پتانسیم اسید فتالات (P.A.P) تهیه شده از موسسه ملی استانداردها و فن‌آوری به عنوان استاندارد آزمون استفاده گردید.

۴-۳-۷ ۱- داده‌های آزمون دوازده آزمایشگاه در جدول ۱۰ آورده شده است. خوانش‌های P.A.P به منظور سهولت در محاسبات به صورت کد نشان داده شده است. اختلاف بین سه خوانش در همه آزمایشگاه‌ها به عنوان معیار همگن بودن

تعیین شد. یک دسته‌بندی یک طرفه در تحلیل واریانس (اختلاف) این است که ابتدا آزمایشی جهت تعیین اینکه آیا اختلاف در نتایج آزمایشگاه (میانگین‌ها) از نظر آماری معنی‌دار است، انجام گیرد. اگر این تغییر معنی‌دار بود و نشان‌دهنده نیاز به اقدام، بنابراین آزمون‌های داده‌های دورافتاده سپس برای جدا کردن آزمایشگاه‌های خاص که نتایجشان سبب تغییر معنی‌دار شده است، استفاده می‌شوند.

۲-۳-۷ جدول ۱۱ نشان می‌دهد که تغییر بین آزمایشگاه‌ها بسیار مهم است. برای آزمودن این‌که آیا این تغییر (بسیار معنی‌دار) مربوط به یک (یا شاید دو) آزمایشگاه که نتایج دورافتاده به دست می‌دهند (یعنی، شاید نشان‌دهنده روش‌های غیراستاندارد) است، می‌توانیم میانگین‌های آزمایشگاه را برای داده‌های دورافتاده آزمایش کنیم. از تحلیل واریانس، یک تخمین از واریانس یک خوانش منفرد معادل $0.008793 = \sqrt{0.094}$ است و بنابراین انحراف استاندارد تخمینی از میانگین سه خوانش $0.054 = \frac{0.094}{\sqrt{3}}$ می‌باشد.

۳-۳-۷ چون تخمین از تغییر درون آزمایشگاهی مستقل از هرگونه اختلاف بین آزمایشگاه‌های است، می‌توانیم از رابطه آماری \bar{T} از قسمت ۱-۷ برای آزمون داده‌های دورافتاده استفاده کنیم. یک آزمون از انحراف‌های میانگین‌های آزمایشگاه از میانگین میانگین‌ها نشان می‌دهد که آزمایشگاه دهم یک خوانش میانگین بسیار کمتر از میانگین میانگین‌ها به دست آورده و آزمایشگاه دوازدهم یک مقدار میانگین بالا در مقایسه با همه میانگین‌ها به دست آورده است. برای آزمون اول چنانچه آزمایشگاه دهم یک داده دورافتاده است، محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{T} = (1.871 - 0.745) / 0.054 = 20.9$$

جدول ۹- مقادیر بحرانی (آزمون-یک طرفه) برای T وقتی انحراف s_v استاندارد مستقل است

$$t_1 = \frac{(x_n - \bar{x})}{s_v} \text{ or } \frac{(\bar{x} - \bar{x}_1)}{s_v}$$

v=d.f.	n	1 percentage point							
		3	4	5	6	7	8	9	10
1 percentage point									
10	2.78	3.10	3.32	3.48	3.62	3.73	3.82	3.90	4.04
11	2.72	3.02	3.24	3.39	3.52	3.63	3.72	3.79	3.93
12	2.67	2.96	3.17	3.32	3.45	3.55	3.64	3.71	3.84
13	2.63	2.92	3.12	3.27	3.38	3.48	3.57	3.64	3.76
14	2.60	2.88	3.07	3.22	3.33	3.43	3.51	3.58	3.70
15	2.57	2.84	3.03	3.17	3.29	3.38	3.46	3.53	3.65
16	2.54	2.81	3.00	3.14	3.25	3.34	3.42	3.49	3.60
17	2.52	2.79	2.97	3.11	3.22	3.31	3.38	3.45	3.56
18	2.50	2.77	2.95	3.08	3.19	3.28	3.35	3.42	3.53
19	2.49	2.75	2.93	3.06	3.16	3.25	3.33	3.39	3.50
20	2.47	2.73	2.91	3.04	3.14	3.23	3.30	3.37	3.47
24	2.42	2.68	2.84	2.97	3.07	3.16	3.23	3.29	3.38
30	2.38	2.62	2.79	2.91	3.01	3.08	3.15	3.21	3.30
40	2.34	2.57	2.73	2.85	2.94	3.02	3.08	3.13	3.22
60	2.29	2.52	2.68	2.79	2.88	2.95	3.01	3.06	3.15
120	2.25	2.48	2.62	2.73	2.82	2.89	2.95	3.00	3.08
∞	2.22	2.43	2.57	2.68	2.76	2.83	2.88	2.93	3.01
5 percentage points									
10	2.01	2.27	2.46	2.60	2.72	2.81	2.89	2.96	3.08
11	1.98	2.24	2.42	2.56	2.67	2.76	2.84	2.91	3.03
12	1.96	2.21	2.39	2.52	2.63	2.72	2.80	2.87	2.98
13	1.94	2.19	2.36	2.50	2.60	2.69	2.76	2.83	2.94
14	1.93	2.17	2.34	2.47	2.57	2.66	2.74	2.80	2.91
15	1.91	2.15	2.32	2.45	2.55	2.64	2.71	2.77	2.88
16	1.90	2.14	2.31	2.43	2.53	2.62	2.69	2.75	2.86
17	1.89	2.13	2.29	2.42	2.52	2.60	2.67	2.73	2.84
18	1.88	2.11	2.28	2.40	2.50	2.58	2.65	2.71	2.82
19	1.87	2.11	2.27	2.39	2.49	2.57	2.64	2.70	2.80
20	1.87	2.10	2.26	2.38	2.47	2.56	2.63	2.68	2.78
24	1.84	2.07	2.23	2.34	2.44	2.52	2.58	2.64	2.74

جدول ۹- ادامه

	5 percentage points									
30	1.82	2.04	2.20	2.31	2.40	2.48	2.54	2.60	2.69	
40	1.80	2.02	2.17	2.28	2.37	2.44	2.50	2.56	2.65	
60	1.78	1.99	2.14	2.25	2.33	2.41	2.47	2.52	2.61	
120	1.76	1.96	2.11	2.22	2.30	2.37	2.43	2.48	2.57	
∞	1.74	1.94	2.08	2.18	2.27	2.33	2.39	2.44	2.52	

۴-۳-۷ این مقدار \bar{T} به طور بدیهی در یک سطح بسیار پایین از احتمال ($P < 0.01$) بر اساس جدول ۹ با $n=12$ و $v=24$ درجه آزادی) معنی دارد است. بنابراین نتیجه می گیریم که روش های آزمون آزمایشگاه دهم می باشد بررسی شود.

۵-۳-۷ با حذف آزمایشگاه دهم، یک میانگین جدید از میانگین ها (۱۹۷۳) محاسبه می کنیم و نتایج آزمایشگاه دوازدهم را از جهت داده دورافتاده آزمایش می کنیم داریم

$$\bar{T} = \frac{(2.327 - 1.973)}{0.054} = 6.56$$

و این مقدار \bar{T} در $P < 0.01$ معنی دار است ($T = 20.9 >> 3.38$) که $3/38$ مقدار بحرانی به دست آمده از جدول ۹ برای $n=11$ و $v=24$ درجه از آزادی می باشد. چون در جدول ۹ مقدار موردنظر $n=11$ را از قلم انداخته است، مقادیر بحرانی بزرگ تر هم جوار مثلاً $3/38$ برای $n=12$ و $3/39$ برای $n=10$ استفاده می شود. در نتیجه روش های آزمایشگاه ۱۲ نیز باید بررسی شود.

۶-۳-۷ برای بررسی اینکه آزمایشگاه های باقیمانده واقعاً نتایج یکنواختی به دست می دهد می توانیم تجزیه تحلیل واریانس را با حذف آزمایشگاه های ۱۰ و ۱۲ تکرار کنیم. محاسبات نتایج نشان داده شده در جدول ۱۲ را به دست می دهد.

۷-۳-۱ برای این تحلیل، نوسان بین آزمایشگاه در سطح ۵٪ معنی دار نیست و نتیجه می گیریم که همه آزمایشگاه ها جز شماره ۱۰ و ۱۲ توانایی یکسان در روش آزمون نشان می دهند.

۷-۳-۲ در نتیجه باید یک روش سیستماتیک برای بازبینی روش های آزمون آزمایشگاه های شماره ۱۰ و ۱۲ جهت تعیین این که چرا روش های آن ها به وضوح از ده آزمایشگاه دیگر متفاوت است، وجود داشته باشد (در این نوع از مشکل جداول گرین هاوس، هالپرین و کرن فیلد^۱ (۱۳) هم می توانند برای آزمون داده های دورافتاده میانگین های آزمایشگاه استفاده شود).

جدول ۱۰- استانداردسازی محلول NaOH

آزمایشگاه $(P.A.P0.096000 \times 10^3)$	مجموع	میانگین	استاندارد انحراف	
			میانگین از میانگین	میانگین‌ها
1	1.893			
	1.972			
	1.876	5.741	1.914	0.043
2	2.046			
	1.851			
	1.949	5.846	1.949	0.078
3	1.874			
	1.792			
	1.829	5.495	1.832	-0.039
4	1.861			
	1.998			
	1.983	5.842	1.947	0.076
5	1.922			
	1.881			
	1.850	5.653	1.884	0.013
6	2.082			
	1.958			
	2.029	6.069	2.023	0.152
7	1.992			
	1.980			
	2.066	6.038	2.013	0.142
8	2.050			
	2.181			
	1.903	6.134	2.045	0.174

جدول ۱۰- ادامه

9	1.831			
	1.883			
	1.855	5.569	1.856	-0.015
10	0.735			
	0.722			
	0.777	2.234	0.745	-1.126
11	2.064			
	1.794			
	1.891	5.749	1.916	0.045
12	2.475			
	2.403			
	2.102	6.980	2.327	0.456
		67.35		
			1.871	

جدول ۱۱- آنالیز واریانس

	مربعات	مجموع مربعات	درجه آزادی	منبع تغییر	میانگین مربعات	f-Ratio
بین آزمایشگاه	11	4.70180	0.4274	F=V 48.61 (Highly significant)		
درون آزمایشگاه	24	0.21103	0.008793		4.00	
کل	35	4.91283				

جدول ۱۲ - آنالیز واریانس
(آزمایشگاه‌های ۱۰ و ۱۲ حذف شدند)

منبع تغییر	درجه آزادی	مجموع مربعات	میانگین مربعات	f-Ratio
بین آزمایشگاه	9	0.13889	0.015430	F=V 2.36
درون آزمایشگاه	20	0.13107	0.00655	F _{0.05(9,20)} =V _{2.40} F _{0.01(9,20)} =V _{3.45}
کل	29	0.26996		

۷-۳-۷

توصیه‌های احتیاطی

در استفاده از آزمون‌ها برای داده‌های دورافتاده مانند مثال‌های بالا، مقصود معطوف داشتن آزمون‌های آماری مفید برای انتخاب آن آزمایشگاه‌هایی است که سطوح اندازه‌گیری متفاوت نسبت به دیگران دارند. بنابراین فرض کردیم که هیچ جزئی از تغییر در بین میانگین‌های اندازه‌گیری واقعی آزمایشگاه نباید وجود داشته باشد. به عبارت دیگر واضح است که در عمل همه‌ی آزمون‌های بین آزمایشگاهی انجام گرفته توسط شخص، حقیقتاً یک مؤلفه واریانس غیر صفر بین آزمایشگاه‌های هم‌تراز پیدا می‌کند. اغلب واریانس بین میانگین‌های آزمایشگاه می‌تواند چندین برابر آنکه در داخل آزمایشگاه‌های منفرد است باشد. بنابراین اگر اندازه واقعی مؤلفه واریانس در میان آزمایشگاه‌ها را بدانیم یا باید از آن استفاده کنیم - یا از آن مراقبت کنیم - به منظور تنظیم آزمون F جهت تشخیص انحرافات نامطلوب آن دسته از آزمایشگاه‌هایی که سطح میانگین آن‌ها از اندازه‌گیری‌های معمول یا سطح قابل قبول آزمایشگاه‌های کاملاً موافق جداسده است، نسبت F مشاهده شده می‌تواند در واریانس درونی یک میانگین نمونه ضرب و بر این کمیت بعلاوه واریانس بین آزمایشگاهی تقسیم شود. همچنین در صورت تمایل، یک اقدام تا حدی مشابه می‌تواند برای آزمون‌های با داده‌های دورافتاده منفرد، استفاده شود. به‌حال در مثال ویژه‌ی خودمان، ما می‌خواستیم تا آزمایشگاه‌های خاص که از سطح میانگین دور شده‌اند را از آزمایشگاه‌های دقیقاً موافق شناسایی کنیم. در حقیقت اگر دقت و صحت بالایی را می‌طلبیم، این امر می‌باشد. هدف بسیاری از برنامه‌های آزمون بین آزمایشگاهی باشد.

۸ معيارهای توصیه شده برای انحراف استاندارد معلوم

۱-۸ بسیاری از موقع انحراف استاندارد جمعیت ۵ می‌تواند دقیقاً معلوم باشد. در این موارد جدول ۱۳ می‌تواند برای داده‌های دورافتاده منفرد آنچه در مثال زیر توضیح می‌دهیم استفاده شود.

۲-۸ مثال ۷ (۵ معلوم) - مسیر عبور ماهواره اکو^{۱۰} (بالن) در هنگام رؤیت شدن بر روی صفحات ستاره ثبت گردید . عکس ها به وسیله یک دوربین با دیافراگم خودکار زمان بندی شده برای گرفتن یکسری از نقاط مربوط به مسیر اکو تهیه شده است . از آنجا که از ستاره ها نیز هم زمان ، مانند ماهواره عکس برداری شد ، همه تصاویر ستاره دنباله دار نشان داده و به همین علت صفحات ستاره نامیده شدند .

جدول ۱۳- مقادیر بحرانی (آزمون یک-سویه) $T_{n\infty}$ و $T_{1\infty}$

وقتی انحراف استاندارد جمعیت ۵ معلوم است

مشاهده <i>n</i>	سطح اهمیت		
	۵%	۱%	۰.۵%
2	1.39	1.82	1.99
3	1.74	2.22	2.4
4	1.94	2.43	2.62
5	2.08	2.57	2.76
6	2.18	2.68	2.87
7	2.27	2.76	2.95
8	2.33	2.83	3.02
9	2.39	2.88	3.07
10	2.44	2.93	3.12
11	2.48	2.97	3.16
12	2.52	3.01	3.2
13	2.56	3.04	3.23
14	2.59	3.07	3.26
15	2.62	3.1	3.29
16	2.64	3.12	3.31
17	2.67	3.15	3.33
18	2.69	3.17	3.36
19	2.71	3.19	3.38
20	2.73	3.21	3.39
21	2.75	3.22	3.41
22	2.77	3.24	3.42
23	2.78	3.26	3.44
24	2.8	3.27	3.45
25	2.81	3.28	3.46

۱-۲-۸ مختصات x و y هر نقطه بر مسیر اکو از یک عکس با استفاده از مقایسه گر فضایی خوانده شد . برای حذف انحراف خوانشگر ، عکس در یک موقعیت قرار می گیرد و مختصات خوانده می شوند . سپس عکس ۱۸۰ درجه چرخانیده می شود و مختصات دوباره خوانده می شود . میانگین دو خوانش به عنوان خوانش نهایی در نظر گرفته می شود . قبل از

هرگونه محاسبات بیشتر خوانش ها باید از نظر خوانش فاحش یا خطای جدولبندی جدا شوند. این با آزمایش تفاوت در خوانش‌های به دست آمده در دو موقعیت عکس انجام می‌شود.

۲-۲-۸ در جدول ۱۴ یک نمونه از شش خوانش انجام شده در دو موقعیت و اختلاف بین این خوانش‌ها ثبت شده است. در خشانش سوم اختلاف نسبتاً زیاد است. آیا کاربر در قرار دادن شاخص دوربین بر روی نقطه اشتباہ کرده است؟

۳-۲-۸ برای این مثال یک تخمین مستقل از δ موجود است، چون آزمون‌های گستردۀ روی مقایسه‌گرهای فضایی نشان می‌دهد که انحراف استاندارد در خطای خوانشگر در حدود $4\mu\text{m}$ است. تعیین این خطای استاندارد بر اساس نمونه بزرگ بوده است که ما می‌توانیم فرض کنیم $4\mu\text{m} = \sigma$ است.

بنابراین انحراف استاندارد اختلاف بین ۲ خوانش عبارت است از

$$\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} \text{ or } 5.7 \mu\text{m}$$

۴-۲-۸ برای این ۶ خوانش بالا میانگین اختلاف در مختصات x و میانگین اختلاف در مختصات y است. برای خوانش سؤال برانگیز سوم داریم

$$\bar{T}_x = (24 - 3.5) / 5.7 = 3.6$$

$$\bar{T}_y = (22 - 1.8) / 5.7 = 3.54$$

از جدول ۱۳ مشاهده می‌کنیم که برای $n=6$ مقادیر $T_{n,\infty}$ به بزرگی مقادیر محاسبه شده، با احتمال کمتر از ۱٪ اتفاق خواهد افتاد در حالی که به نظر یک خطای خوانش معنی‌دار در نقطه سوم رخداده است.

۳-۸ تعداد زیادی از نقاط خوانده شد و به صورت خودکار بر صفحات ستاره جدولبندی شد. در اینجا ما یک نمونه بسیار کوچک از این نقاط را انتخاب کردیم. در یک تمرین واقعی جدولبندی‌ها احتمالاً برای خطاهای خیلی بزرگ مانند خطاهای جدول نویسی به سرعت پیمایش می‌شوند، سپس برخی محاسبات تخمینی از جمله ± 3 انحراف استاندارد خطای خوانشگر می‌تواند برای پیمایش داده‌های دورافتاده ناشی از خطای کاربر استفاده شود (یادآوری ۶). به عبارت دیگر داده‌ها احتمالاً بسیار گستردۀ هستند تا کاربرد مکرر آزمون‌های دقیق نظیر آن‌هایی که در بالا تشریح شد مجاز باشد (مخصوصاً برای اندازه نمونه متغیر)، اما این مثال موردی را که در آن ۵ معلوم فرض شده است را تشریح می‌کند. اگر مغایرت بزرگ در دو خوانش از یک مختصات پیدا شد، بنابراین خوانش باید حذف شود یا قبل از انجام محاسبات بیشتر مجدد خوانده شود.

جدول ۱۴ - اندازه‌گیری‌ها، μm

مختصات x	مختصات y			
موقعیت	موقعیت	موقعیت	موقعیت	موقعیت
Δx	Δy			

1	1+180°	1	1+180°
-53011	-53004	-7	70263
-38112	-38103	-9	-39739
-2804	-2828	24	81162
18473	18467	6	41477
25507	25497	10	41485
87736	87739	-3	1082
			-7442
			-7434
			-8

یادآوری - توجه کنید که مقادیر جدول ۱۳ بین حدود ۱/۴۵ و ۳/۵۵ متفاوت هستند.

۹ توضیحات اضافی

۱-۹ در بالا ما فقط بخشی از نمونه‌های آزمایش را برای یافتن داده‌های دورافتاده، به صورت آماری پوشش داده‌ایم، هر چند یک محدوده وسیعی بعد از تصمیم‌گیری اینکه داده‌های دورافتاده در نتایج وجود دارند باقی می‌ماند. وقتی که برخی مشاهده‌ها نمونه به عنوان داده دورافتاده مشخص می‌شوند، سپس یک تحقیق وسیع جهت تعیین علت باید آغاز شود. در عمل شخص باید خطاهای فاحش، خطاهای انسانی، خطاهای اندازه‌گیری، خطای کالیبراسیون و غیره را جستجو کند. اگر دلایل برای مشاهده‌ها دارای انحراف کشف شد سپس شخص باید بر اساس آن عمل کند و همچنین می‌تواند مشاهده‌ها دیگر را به دقت بررسی کند. سرانجام اگر شخص به این نکته برسد که برخی مشاهده‌ها باید دور انداخته شوند یا در یک حالت ویژه مبتنی بر بررسی‌های آماری مورد عمل قرار گیرد، سپس باید تصمیم بگیرد چه عملی باید در آنالیز بعدی داده‌ها انجام شود. ما تصمیم نداریم این مشکل را در اینجا پوشش دهیم، چون در بسیاری موارد این مسئله شدیداً به مورد خاص در دست اقدام بستگی دارد.

در هر حال مذکور می‌شویم که می‌توان یکبار مشاهده‌ها مغایر را کاملاً حذف نمود و تمام دلایل فیزیکی (و ترجیحاً نه به علت دلایل آماری) و فقط مشاهده‌ها باقیمانده می‌توانند در تجزیه تحلیل‌های بعدی یا مشکلات تخمینی استفاده شوند. به عبارت دیگر بعضی ممکن است بخواهند مقادیر انحراف را با مشاهده‌ها به دست آمده جدید جایگزین نمایند و دیگران شاید بخواهند داده‌های دورافتاده را "Winsorize" کنند، یعنی آن‌ها را با نزدیک‌ترین مقادیر بعدی در نمونه جایگزین نمایند. همچنین بعضی ممکن است بخواهند با وجود داده‌های دورافتاده در یک نمونه از میانه بجای میانگین استفاده نمایند و الى آخر. نهایتاً مذکور می‌شویم یک تمرین نسبتاً خوب یا مناسب می‌تواند استفاده از تئوری نمونه حذف شده (۱۱) برای مواردی از نمونه‌ها که ما برخی از مشاهده‌هایشان را رد یا سانسور کرده‌ایم باشد. در اینجا نمی‌توانیم به بررسی بیشتر مشکلات بپردازیم، برای مطالعات بیشتر بر داده‌های دورافتاده مراجع (۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹) را مشاهده کنید.

۲-۹ یک معیار آزمون نمونه برای حالت غیرعادی و بنابراین احتمال داده‌های دورافتاده که در بالا پوشش داده نشده، آمار W، ویلک-شاپیرو^۱ است که برای یک نمونه با اندازه n توسط رابطه زیر به دست می‌آید.

$$W = \frac{\left[\sum_{i=1}^{[n/2]} a_{n-i+1} (x_{n-i+1} - x_i) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$$

$$w = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

[n.2] بالاترین عدد صحیح در $n.2$ است و ضرایب a_{n-i+1} مرتبه‌های آماری برای $n2(1)(50)$ ارائه شده در مرجع (۲۰) هستند. آمار W ، ویلک-شاپیرو ایجادشده است تا کاملاً به انحراف از حالت عادی حساس باشد و عموماً می‌تواند با آزمون‌های $\sqrt{b_1}$ و b_2 بحث شده در بالا مقایسه شود. به علاوه آمار W می‌تواند همچنین به عنوان یک آزمون برای داده‌های دورافتاده یا در غیر این صورت به عنوان یک آزمون عمومی برای ناهمگن بودن مقادیر نمونه استفاده شود.

آزمون‌های مهم ارائه شده‌ی بالا انتخاب یا پیشنهاد می‌شوند وقتی که آن‌ها به صراحت داده‌های دورافتاده مشکوک معین را در نمونه نشان دهنند. از این‌رو متمایل به استفاده آزمون‌های بالا برای داده‌های دورافتاده خاص در نمونه‌ها برای موردی که آن‌ها به صورت روتین استفاده می‌شوند، مثلًاً توسط مهندسین هستیم.

ڪتاب نامہ

- (1) Dixon, W. J., "Processing Data for Outliers," *Biometrics*, BIOMA March 1953, Vol 9, No. 1, pp. 74–89.
- (2) Grubbs, F. E., and Beck, G., "Extension of Sample Sizes and Percentage Points for Significance Tests of Outlying Observations," *Technometrics*, TCMTA, Vol 14, No. 4, November 1972, pp. 847–854.
- (3) Ferguson, T. S., *On the Rejection of Outliers*, Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, edited by Jerzy Neyman, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, Calif., 1961.
- (4) Ferguson, T. S., "Rules for Rejection of Outliers," *Revue Inst. Int. de Stat.*, RINSA Vol 29, Issue 3, 1961, pp. 29–43.
- (5) Grubbs, F. E., "Sample Criteria for Testing Outlying Observations," *Annals of Mathematical Statistics*, AASTA Vol 21, March 1950, pp. 27–58.
- (6) David, H. A., Hartley, H. O., and Pearson, E. S., "The Distribution of the Ratio in a Single Sample of Range to Standard Deviation, *Biometrika*, BIOKA Vol 41, 1954, pp. 482–493.
- (7) Tietjen, G. L., and Moore, R. H., "Some Grubbs-Type Statistics for the Detection of Several Outliers," *Technometrics*, TCMTA, Vol 14, No. 3, August 1972, pp. 583–597.
- (8) Chauvenet, W., *A Manual of Spherical and Practical Astronomy*, Vol 2, Fifth Edition.
- (9) David, H. A., and Quesenberry, C. P., "Some Tests for Outliers," Technical Report No. 47, OOR(ARO) Project No. 1166, Virginia Polytechnic Inst., Blacksburg, Va.
- (10) Grubbs, F. E., "Procedures for Detecting Outlying Observations in Samples," *Technometrics*, TCMTA, Vol 11, No. 4, February 1969, pp. 1–21.
- (11) Kudo, A., "On the Testing of Outlying Observations," *Sankhya - The Indian Journal of Statistics*, SNKYA Vol 17, Part 1, June 1956, pp. 67–76.
- (12) David, H. A., "Revised Upper Percentage Points of the Extreme Studentized Deviate from the Sample Mean," *Biometrika*, BIOKA Vol 43, 1956, pp. 449–451.
- (13) Greenhouse, S. W., Halperin, M., and Cornfield, J., "Tables of Percentage Points for the Studentized Maximum Absolute Deviation in Normal Samples," *Journal of the American Statistical Association*, JSTNA Vol 50, No. 269, 1955, pp. 185–195.
- (14) Anscombe, F. J., "Rejection of Outliers," *Technometrics*, TCMTA Vol 2, No. 2, 1960, pp. 123–147.
- (15) Chew, Victor, "Tests for the Rejection of Outlying Observations," RCA Systems Analysis Technical Memorandum No. 64-7, 31 Dec. 1964, Patrick Air Force Base, Fla.
- (16) Kruskal, W. H., "Some Remarks on Wild Observations," *Technometrics*, TCMTA Vol 2, No. 1, 1960, pp. 1–3.
- (17) Proschan, F., "Testing Suspected Observations," *Industrial Quality Control*, IQCOA Vol XIII, No. 7, January 1957, pp. 14–19.
- (18) Sarhan, A. E., and Greenberg, B. G., Editors, *Contributions to Order Statistics*, John Wiley and Sons, Inc., New York 1962.
- (19) Thompson, W. R. "On a Criterion for the Rejection of Observations and the Distribution of the Ratio of the Deviation to the Sample Standard Deviation," *The Annals of Mathematical Statistics*, AASTA Vol 6, 1935, pp. 214–219.

- (20) Shapiro, S. S., and Wilk, M. B., "An Analysis of Variance Test for Non-Normality (Complete Samples)," *Biometrika*, BIOKA, Vol 52, 1965, pp. 591–611.