INSO
8201-2
1st. Revision
2016

جمهوری اسلامی ایران
Islamic Republic of Iran
سازمان ملی استاندارد ایران
Iranian National Standardization Organization

استاندارد ملی ایران
۸۲۰۱-۲
تجدید نظر اول
۱۳۹۵

ارائه نتایج دانه بندی- قسمت ۲: محاسبه میانگین اندازه/قطر و گشتاور دانه ها از توزیع های اندازه دانه

Representation of results of particle size analysis -Part2: Calculation of average particle sizes/diameters and moments from particle size distributions

ICS: 19.120

به نام خدا

آشنایی با سازمان ملی استاندارد ایران

سازمان ملی استاندارد ایران به موجب بند یک مادهٔ ۳ قانون اصلاح قوانین و مقررات مؤسسهٔ استانداردو تحقیقات صنعتی ایران،مصوب بهمن ماه۱۳۷۱تنها مرجع رسمی کشوراست که وظیفهٔ تعیین، تدوین و نشراستانداردهای ملی (رسمی) ایران را به عهده دارد.

تدوین استاندارد در حوزه‌های مختلف در کمیسیون‌های فنی مرکب از کارشناسان سازمان، صاحب‌نظران مراکز و مؤسسات علمی، پژوهشی، تولیدی و اقتصادی آگاه و مرتبط انجام می‌شود و کوششی همگام با مصالح ملی و با توجه به شرایط تولیدی، فناوری و تجاری است که از مشارکت آگاهانه و منصفانهٔ صاحبان حق و نفع، شامل تولیدکنندگان، مصرف‌کنندگان، صادرکنندگان و واردکنندگان، مراکز علمی و تخصصی، نهادها، سازمان‌های دولتی و غیردولتی حاصل می‌شود. پیش‌نویس استانداردهایملی ایران برای نظرخواهی به مراجع ذی‌نفع و اعضای کمیسیون‌های مربوط ارسال می‌شود و پس از دریافت نظرها و پیشنهادها در کمیتهٔملی مرتبط با آن رشته طرح و در صورت تصویب، به عنوان استاندارد ملی (رسمی) ایران چاپ و منتشر می‌شود.

پیش‌نویس استانداردهایی که مؤسسات و سازمان‌های علاقه‌مند و ذی‌صلاح نیز با رعایت ضوابط تعیین شده تهیه می‌کنند درکمیته ملی طرح، بررسی و درصورت تصویب، به عنوان استانداردملی ایران چاپ و منتشر می‌شود. بدین ترتیب، استانداردهایی ملی تلقی می‌شود که بر اساس مقررات استاندارد ملی ایران شمارهٔ ۵ تدوین و در کمیتهٔ ملی استاندارد مربوط که در سازمان ملی استاندارد ایران تشکیل می‌شود به تصویب رسیده باشد.

سازمان ملی استاندارد ایران از اعضای اصلی سازمان بین‌المللی استاندارد(ISO)[1]،کمیسیون بین‌المللی الکتروتکنیک (IEC)[2] و سازمان بین‌المللی اندازه‌شناسی قانونی(OIML)[3] است و به عنوان تنها رابط[4] کمیسیون کدکس غذایی(CAC)[5] در کشور فعالیت می‌کند. در تدوین استانداردهای ملی ایران ضمن توجه به شرایط کلی و نیازمندی‌های خاص کشور، از آخرین پیشرفت‌های علمی، فنی و صنعتی جهان و استانداردهای بین‌المللی بهره‌گیری می‌شود.

سازمان ملی استاندارد ایران می‌تواند با رعایت موازین پیش‌بینی شده در قانون، برای حمایت از مصرف‌کنندگان، حفظ سلامت و ایمنی فردی و عمومی، حصول اطمینان از کیفیت محصولات و ملاحظات زیست‌محیطی و اقتصادی، اجرای بعضی از استانداردهای ملی ایران را برای محصولات تولیدی داخل کشور و یا اقلام وارداتی، با تصویب شورای عالی استاندارد، اجباری کند. سازمان می‌تواند به منظور حفظ بازارهای بین‌المللی برای محصولات کشور، اجرای استاندارد کالاهای صادراتی و درجه‌بندی آن را اجباری کند. همچنین برای اطمینان بخشیدن به استفاده‌کنندگان از خدمات سازمان‌ها و مؤسسات فعال در زمینهٔ مشاوره، آموزش، بازرسی، ممیزی و صدورگواهی سیستم‌های مدیریت کیفیت و مدیریت زیست‌محیطی، آزمایشگاه‌ها و مراکز واسنجی (کالیبراسیون) وسایل سنجش، سازمان ملی استاندارد این‌گونه سازمان‌ها و مؤسسات را بر اساس ضوابط نظام تأیید صلاحیت ایران ارزیابی می‌کند و در صورت احراز شرایط لازم، گواهینامهٔ تأیید صلاحیت به آن‌ها اعطا و بر عملکرد آن‌ها نظارت میکند. ترویج دستگاه بین‌المللی یکاها، واسنجی وسایل سنجش، تعیین عیار فلزات گرانبها و انجام تحقیقات کاربردی برای ارتقای سطح استانداردهای ملی ایران از دیگر وظایف این سازمان است.

1- International Organization for Standardization
2- International Electrotechnical Commission
3- International Organization for Legal Metrology (Organisation Internationale de Metrologie Legals)
4-Contact point
5- Codex Alimentarius Commission

کمیسیون فنی تدوین استاندارد

« ارائه نتایج دانه بندی-

قسمت دوم: محاسبه میانگین اندازه/قطر و گشتاور دانه ها از توزیع های اندازه دانه »

رئیس:	**سمت و/ یا نمایندگی**
ایمانی ، هوشیار (دکترای سازه)	عضو هیات علمی دانشگاه محقق اردبیلی
دبیر:	
یونسی، سید شهاب الدین (کارشناس ارشد عمران - سازه)	کارشناس استاندارد- اداره‌کل استاندارد استان‌اردبیل
اعضاء: (اسامی به ترتیب حروف الفباء) ابراهیم زاده پیرآلقر، سعیده (کارشناس ارشد عمران - سازه)	کارشناس سازه – شرکت مهندسی شهرو خانه فردا
الماسی، خلیل (کارشناس عمران)	آزمایشگاه فنی و مکانیک خاک استان اردبیل
امانی، بهنام (کارشناس ارشدعمران-مکانیک خاک وپی)	کارشناس استاندارد- اداره‌کل استاندارد استان‌اردبیل
ساجد اردبیلی، فرزین (کارشناس ارشد شیمی کاربردی)	رئیس اداره نظارت بر اجرای استاندارد- اداره‌کل استاندارد استان-اردبیل
شرافتخواه آذری، شهین (کارشناس ارشد مهندسی علوم و صنایع غذایی)	کارشناس استاندارد- اداره‌کل استاندارد استان‌اردبیل
شعبانی، حمید (کارشناس ارشد عمران - سازه)	کارشناس استاندارد- اداره‌کل استاندارد استان‌اردبیل
طالبی، مهدی (کارشناس مهندسی صنایع)	کارشناس استاندارد- اداره‌کل استاندارد استان‌اردبیل

اعضا: (اسامی به ترتیب حروف الفبا)	**سمت و/ یا نمایندگی**
محمدی ادیب، جعفر (کارشناس مهندسی مکانیک حرارات و سیالات)	کارشناس استاندارد- اداره‌کل استاندارد استان‌اردبیل
ویراستار:	
صبور گیلوان، عباس	کارشناس کالیبراسیون مرکز اندازه شناسی -سازمان ملی استاندارد

فهرست مندرجات

صفحه

عنوان

آشنایی با سازمان ملی استاندارد		ب
کمیسیون فنی تدوین استاندارد		ج
پیش‌گفتار		و
۱	هدف و دامنه کاربرد	۱
۲	مراجع الزامی	۱
۳	نمادها و اصطلاحات اختصاری	۲
۴	روش گشتاور-نشانه گذاری	۳
۴-۱	تعریف گشتاور مطابق با روش گشتاور-نشانه گذاری	۴
۴-۲	تعریف میانگین قطر دانه ها مطابق با روش گشتاور-نشانه گذاری	۴
۴-۲-۱	واژگان مورد استفاده برای اندازه متوسط دانه ها در روش گشتاور-نشانه گذاری $\overline{x}_{k,r}$	۵
۴-۲-۲	میانگین حسابی اندازه دانه ها	۵
۴-۲-۳	میانگین وزنی اندازه دانه ها	۶
۴-۲-۴	میانگین هندسی اندازه دانه ها	۶
۴-۲-۵	میانگین همساز اندازه دانه ها	۷
۴-۳	محاسبه مقادیر گشتاورها و میانگین اندازه دانه ها از روی یک توزیع ارائه شده	۸
۴-۳-۱	محاسبه $M_{k,r}$ و میانگین اندازه دانه ها از روی یک توزیع بر اساس تعداد و یا حجم دانه ها	۸
۴-۴	واریانس و انحراف استاندارد توزیع دانه بندی	۱۰
۴-۵	محاسبه گشتاورها و میانگین اندازه دانه ها از روی یک توزیع لگاریتمی نرمال	۱۰
۴-۶	محاسبه سطح ویژه حجم و قطر میانگین ساتر	۱۱
۵	مشخصات نمونه‌بردارهای بار بستر	۱۱
۵-۱	تعریف گشتاورها بر اساس روش گشتاور-نسبی-نشانه گذاری	۱۱
۵-۲	تعریف میانگین اندازه دانه ها بر اساس روش گشتاور-نسبی-نشانه گذاری	۱۲
۵-۲-۱	واژگان مورد استفاده برای اندازه میانگین دانه ها در روش گشتاور-نسبی-نشانه گذاری $\overline{D}_{p,q}$	۱۳
۵-۲-۲	میانگین هندسی اندازه دانه ها	۱۴
۵-۲-۳	میانگین همساز اندازه دانه ها	۱۴
۵-۳	محاسبه اندازه میانگین دانه ها با استفاده از یک توزیع دانه بندی	۱۴
۵-۴	واریانس و انحراف استاندارد یک توزیع دانه بندی	۱۵

۵-۵ روابط بین میانگین اندازه دانه ها ۱۶
۵-۶ محاسبه سطح مخصوص حجمی و قطر میانگین ساتر ۱۷
۶ رابطه بین گشتاور-نشانه گذاری و گشتاور-نسبی-نشانه گذاری ۱۷
۷ دقت محاسبات متغیرهای توزیع اندازه دانه ها ۱۹
پیوست الف(اطلاعاتی) مثال عددی برای محاسبه اندازه میانگین دانه ها و انحراف استاندارد از روی نمودار توزیع دانه بندی بر اساس حجم ۲۰
پیوست ب(اطلاعاتی) مثال عددی برای محاسبه اندازه میانگین دانه ها و انحراف استاندارد از روی نمودار توزیع دانه بندی بر اساس حجم ۲۳
پیوست پ(اطلاعاتی) دقت متغیرهای محاسبه شده توزیع دانه بندی ۲۷
پیوست ت(اطلاعاتی) کتابنامه ۲۹

پیش‌گفتار

استاندارد «ارائه نتایج دانه بندی-قسمت دوم: محاسبه میانگین اندازه/قطر و گشتاور دانه ها از توزیع های اندازه دانه» که پیش‌نویس آن درکمیسیون‌های مربوط تهیه وتدوین شده است و در دویست و هشتاد و هشتمین اجلاس کمیتهٔ ملی استاندارد اندازه شناسی، اوزان و مقیاس ها مورخ ۹۵/۰۱/۲۹ مورد تصویب قرار گرفته است، اینک به استناد بند یک مادهٔ ۳ قانون اصلاح قوانین و مقررات مؤسسهٔ استاندارد و تحقیقات صنعتی ایران، مصوّب بهمن ماه۱۳۷۱،به عنوان استاندارد ملی ایران منتشر می‌شود.

برای حفظ همگامی و هماهنگی با تحوّلات وپیشرفت‌های ملی و جهانی در زمینهٔ صنایع، علوم و خدمات، استانداردهای ملی ایران در مواقع لزوم تجدید نظر خواهد شد و هر پیشنهادی که برای اصلاح و تکمیل این استانداردها ارائه شود، هنگام تجدید نظر در کمیسیون فنی مربوط مورد توجه قرار خواهد گرفت. بنابراین، باید همواره از آخرین تجدید نظراستانداردهای ملی استفاده کرد.

منابع و مآخذی که برای تهیهٔ این استاندارد مورد استفاده قرار گرفته به شرح زیر است:

ISO 9276-2:2014, Representation of results of particle size analysis -Part2: Calculation of average particle sizes/diameters and moments from particle size distributions

ارائه نتایج دانه بندی-

قسمت ۲: محاسبه میانگین اندازه/قطر و گشتاور دانه ها از توزیع های اندازه دانه

۱ هدف و دامنه کاربرد

هدف از تدوین این استاندارد تعیین معادلات مربوطه و نام‌گذاری‌های منطقی برای محاسبهٔ گشتاورها، میانگین اندازهٔ دانه‌ها و انحراف‌های استاندارد از توزیع معلوم دانه‌بندی، می‌باشد. عموما دو سیستم نشانه گذاری که استفاده می‌شوند توضیح داده شده‌اند. یکی از آن ها روش گشتاور و دیگری روش گشتاور نسبی می‌باشد. توزیع اندازه دانه‌ها می‌تواند بصورت نمودار و یا تابع تحلیلی ارائه شود.

قطر معادل هر دانه با هر شکلی به عنوان اندازه آن در نظر گرفته می‌شود. در این حالت ضرایب شکل در محاسبات وارد نمی‌شود. ضمنا قابل ذکر است که نمونه دانه‌ها اندازه‌گیری شده باید نماینده کل دانه‌ها موجود باشند.

برای هر دو سیستم نشانه گذاری، مثال‌های عددی محاسبات اندازه متوسط دانه‌ها و انحراف‌های استاندارد، از روی اطلاعات بدست آمده از نمودارها، در پیوست ارائه شده است.

درستی محاسبات اندازه متوسط دانه ها، در صورت در نظر گرفتن توزیع دانه‌بندی ناقص و یا درصورت اندازه‌گیری تعداد محدودی از دانه‌ها ، می تواند کاهش یابد.

۲ مراجع الزامی

مدارک الزامی زیر حاوی مقرراتی است که در متن این استاندارد به آن ها ارجاع داده شده است. بدین ترتیب آن مقررات جزئی از این استاندارد محسوب می‌شود. در مورد مراجع دارای تاریخ چاپ و/ یا تجدید نظر ، اصلاحیه‌ها و تجدید نظرهای بعدی این مدارک مورد نظرنیست. معهذا بهتر است کاربران ذینفع این استاندارد ، امکان کاربرد آخرین اصلاحیه‌ها وتجدید نظرهای مدارک الزامی زیر را مورد بررسی قرار دهند. در مورد مراجع بدون تاریخ چاپ و/ یا تجدید نظر ، آخرین چاپ و/ یا تجدید نظر آن مدارک الزامی ارجاع داده شده مورد نظر است.استفاده از مراجع زیر برای کاربرد این استاندارد الزامی است.

۲-۱ استانداردملی ایران ۲۹۵ : سال ۱۳۸۳ الک های آزمون – توری فلزی ، صفحهٔ فلزی مشبک و ورق الکتروفرمی- اندازهٔ اسمی چشمه ها

2-2 ISO 9276, Representation of results of particle size analysis- Part 1: Graphical representation

2-3 ISO 9276-5:2005, Representation of results of particle size analysis — Part 5: Methods of calculation relating to particle size analyses using logarithmic normal probability distribution

۳ نمادها و اصطلاحات اختصاری

در صورت نیاز علایم متفاوتی برای روش گشتاور-نشانه گذاری (M) و روش گشتاور نسبی-نشانه گذاری (M-R) در نظر گرفته می شود. این کار باعث می شود دو روش به طور کامل از هم جدا می شوند. برای هر دو سیستم ثبت، واژگان مربوطه برای اندازه های متوسط دانه ها درپیوست های ۴ و ۵ ارائه شده است.

گشتاور-نشانه گذاری	گشتاور-نسبی-نشانه گذاری	توضیح
i	i	شماره رده اندازه با اندازه دانه درشت تر $x_i(M)$ یا اندازه دانه متوسط Di(M-R)
k		توان x
m	m	تعداد رده‌های اندازه
r	r	نوع کمیت یک توزیع (تعریف کلی)
		$r = 0$ نوع کمیت، به وسیلهٔ تعداد
		$r = 1$ نوع کمیت، به وسیلهٔ طول
		$r = 2$ نوع کمیت، به وسیلهٔ سطح یا مساحت تصویر شده
		$r = 3$ نوع کمیت، به وسیلهٔ حجم یا جرم
$M_{k,r}$		گشتاور کامل k ام از توزیع $q_r(x)$
$m_{k,r}$		گشتاور کامل مرکزی k ام از توزیع $q_r(x)$
	M_p	گشتاور p ام توزیع چگالی
	m_p	گشتاور مرکزی p ام توزیع چگالی
	N	تعداد کل دانه ها داخل یک نمونه
	O	مرتبه اندازه متوسط دانه (O=p+q)
	p,q	توان های D در گشتاورها و روابط مشابه آن ها
$q_r(x)$	$q_r(D)$	توزیع چگالی دانه ها از نوع r
$\bar{q}_{r,i}$		میانگین ارتفاع توزیع چگالی در بازهٔ i ام اندازهٔ دانه , Δx_i
$Q_r(x)$	$Q_r(D)$	توزیع تجمعی دانه ها از نوع r
$\Delta Q_{x,i}$		تفاضل دو مقدار از توزیع تجمعی , یعنی مقدار نسبی در بازهٔ i ام اندازهٔ دانه , Δx_i
s_r	s_r	انحراف استاندارد توزیع $Q_r(x)$ و $Q_r(D)$
s_g	s_g	انحراف هندسی استاندارد توزیع
s	s	انحراف استاندارد توزیع لگاریتمی ($s=\ln s_g$)

مساحت سطح	S	S
مساحت سطح ویژه حجم	S_V	S_V
حجم دانه	V	V
حجم متوسط دانه ها		$\overline{V}$
اندازه دانه، قطر کره معادل	D	x
اندازه دانه درشت تر در بازه i ام اندازه دانه		x_i
اندازه دانه ریزتر در بازه i ام اندازه دانه		x_{i-1}
اندازه متوسط اندازه رده i ام	D_i	
اندازه کوچکترین دانه ای که در توزیع وجود دارد		x_{min}
اندازه بزرگترین دانه ای که در توزیع وجود دارد		x_{max}
میانگین اندازه دانه ها (تعریف کلی)	$\overline{D}_{p,q}$	$\overline{x}_{k,r}$
میانگین هندسی اندازه دانه ها	$\overline{D}_{p,p}$	
میانگین حسابی اندازه دانه ها		$\overline{x}_{k,0}$
میانگین وزنی اندازه دانه ها		$\overline{x}_{k,r}$
میانگین هندسی اندازه دانه ها		$\overline{x}_{geo,r}$
میانگین همساز اندازه دانه ها		$\overline{x}_{har,r}$
میانه اندازه دانه ها در توزیع تجمعی حجمی		$x_{50,3}$
پهنای بازه i ام اندازه دانه		$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

۴ گشتاور – نشانه گذاری

گشتاورها متغیر اساسی در تعریف اندازه متوسط و انحراف استاندارد توزیع دانه بندی می باشند. یک نمونه تصادفی، که شامل تعداد محدودی از دانه ها از میان جامعه[1] آماری کلی دانه‌ها می‌باشد، برای تخمین گشتاور توزیع اندازه های جامعه آماری در نظر گرفته شده، مورد استفاده قرار می‌گیرد. اندازه‌گیری اندازه دانه‌ها همواره بر روی نمونه های گسسته انجام شده و شامل تعدادی رده دانه‌بندی گسسته می‌باشد. بنابراین، در این استاندارد فقط گشتاورهای مربوط به نمونه‌ها مورد بررسی قرار می گیرد.

[1] population

۴-۱ تعریف گشتاور مطابق با گشتاور-نشانه گذاری

گشتاور کامل k ام توزیع چگالی به وسیلهٔ انتگرال تعریف شده در معادله ۱ بیان می شود :

$$M_{k,r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^k q_r(x)\,dx \qquad (۱)$$

اگر $r = 0$ باشد $q_0(x)$ توزیع چگالی به وسیلهٔ تعداد و اگر $r = 3$ باشد، $q_3(x)$ توزیع چگالی به وسیلهٔ جرم یا حجم را بیان می کند. اگر حدود انتگرال به وسیلهٔ کوچکترین اندازهٔ دانه $x_{\min}$ و بزرگترین اندازهٔ دانه $x_{\max}$ بیان شود، معادلهٔ (۱) بیانگر گشتاور کامل می باشد.

یک گشتاور کامل ویژه به وسیلهٔ $M_{0,r}$ بیان می شود :

$$M_{0,r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^0 q_r(x)\,dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} q_r(x)\,dx = Q_r(x_{\max}) - Q_r(x_{\min}) = 1 \qquad (۲)$$

$$Q_r(x_i) = \int_{x_{\min}}^{x_i} q_r(x)\,dx \qquad (۳)$$

اگر انتگرال‌گیری بین دو قطر دلخواه x_i و x_{i-1} دانه در یک گستره اندازهٔ معین از یک توزیع انجام گیرد ($x_{\min} \langle x_{i-1} \langle x \langle x_i \langle x_{\max}$) در این صورت گشتاور ناقص می باشد.

$$M_{k,r}(x_{i-1}, x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^k q_r(x)\,dx \qquad (۴)$$

جدا از گشتاورهای حول مبدأ محور اندازهٔ دانه که با معادله های (۱) و (۴) نشان داده می‌شوند، به اصطلاح گشتاور مرکزی k ام ($m_{k,r}$) توزیع چگالی $q_r(x)$ را می توان از توزیع چگالی معین استنتاج کرد. این گشتاور به میانگین وزنی قطر دانه در یک توزیع فراوانی ($\bar{x}_{1,r}$) مربوط می شود (به معادلهٔ (۱۱) مراجعه شود).

گشتاور مرکزی کامل به صورت معادلهٔ (۵) تعریف می شود :

$$m_{k,r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - \bar{x}_{1,r})^k q_r(x)\,dx \qquad (۵)$$

۴-۲ تعریف میانگین قطر دانه ها مطابق با گشتاور-نشانه گذاری

تمام اندازه های میانگین دانه ها به وسیلهٔ معادلهٔ (۶) تعریف می‌شود :

$$\bar{x}_{k,r} = \sqrt[k]{M_{k,r}} \qquad (۶)$$

بسته به اعداد انتخابی برای زیرنویس‌های k و r برای میانگین اندازه دانه‌ها می‌توان تعاریف مختلفی ارائه داد. از آنجا که میانگین اندازه دانه‌ها که از معادلهٔ (۶) محاسبه می‌شود ممکن است بطور قابل ملاحظه‌ای متفاوت باشد، لذا باید زیرنویس‌های k و r همیشه ذکر شوند.

دو گروه از اندازه میانگین دانه ها که بهتر است مورد استفاده قرار بگیرند، اندازه میانگین حسابی دانه ها و اندازه میانگین وزنی دانه ها می باشند.

۴-۲-۱ اصطلاح شناسی برای اندازه متوسط دانه ها در روش گشتاور-نشانه گذاری $\bar{x}_{k,r}$

در جدول ۱، مثال‌هایی از اصطلاح شناسی اندازه‌های متوسط آورده شده است.

جدول ۱- اصطلاح شاسی اندازه متوسط دانه ها $\bar{x}_{k,r}$

کد سیستماتیک	اصطلاح شناسی
$\bar{x}_{1,0}$	میانگین حسابی اندازه دانه ها
$\bar{x}_{2,0}$	میانگین حسابی سطح دانه ها
$\bar{x}_{3,0}$	میانگین حسابی حجم دانه ها
$\bar{x}_{1,1}$	میانگین وزنی اندازه دانه ها
$\bar{x}_{1,2}$	میانگین وزنی سطح دانه ها، قطر متوسط ساتر
$\bar{x}_{1,3}$	میانگین وزنی حجم دانه ها

۴-۲-۲ میانگین حسابی اندازه دانه ها

میانگین حسابی اندازه دانه‌ها نوعی میانگین وزنی بر اساس تعداد دانه ها است که از توزیع چگالی به وسیلهٔ تعداد ($q_0(x)$) محاسبه می‌شود.

$$\bar{x}_{k,0} = \sqrt[k]{M_{k,0}} \qquad (۷)$$

شمارش دانه‌های منفرد در تصویر میکروسکوپی، یک مثال نوعی برای بدست آوردن درصدهای تعداد دانه ها ($r = 0$) به عنوان پایه تعیین میانگین می‌باشد.

مطابق مرجع [2]Heywood میانگین توصیه شده اندازه دانه‌ها، عبارت است از:

میانگین حسابی اندازه دانه بر اساس طول متوسط حسابی از معادلهٔ (۸) به دست می‌آید :

$$\bar{x}_{1,0} = M_{1,0} \qquad (۸)$$

میانگین حسابی سطح دانه از رابطه (۹) به دست می‌آید :

$$\bar{x}_{2,0} = \sqrt[2]{M_{2,0}} \qquad (۹)$$

میانگین حسابی حجم از رابطه (۱۰) به دست می آید :

$$\bar{x}_{3,0} = \sqrt[3]{M_{3,0}} \qquad (۱۰)$$

۴-۲-۳ میانگین وزنی اندازه دانه‌ها

میانگین وزنی دانه ها به وسیلهٔ معادلهٔ (۱۱) تعریف می‌شود :

$$\bar{x}_{k,r} = \sqrt[k]{M_{k,r}} \qquad (۱۱)$$

توزین الک‌ها قبل و بعد از الک کردن یک مثال نوعی برای به دست آوردن درصدهای جرم، ($r = 3$) ، به عنوان پایه ای برای میانگین‌گیری می‌باشد. میانگین وزنی اندازه دانه‌ها، طول مرکز ثقل توزیع $q_r(x)$ را بیان می‌کند. میانگین وزنی توصیه شدهٔ اندازه دانه‌ها، به وسیلهٔ معادله‌های (۱۲) تا (۱۵) بیان می‌شود.

میانگین وزنی اندازه دانه‌ها در توزیع چگالی بر اساس تعداد دانه‌ها، $q_0(x)$ ، هم ارز با میانگین حسابی طول دانه (به معادلهٔ ۸ مراجعه شود) می باشد. که به وسیلهٔ روابط زیر بیان می شود:

میانگین حسابی اندازه‌ها:

$$\bar{x}_{1,0} = M_{1,0} \qquad (۱۲)$$

میانگین وزنی اندازه دانه در توزیع چگالی بر اساس طول متوسط دانه، $q_1(x)$ ، به وسیلهٔ رابطه زیر بیان می‌شود:

میانگین وزنی اندازه دانه‌ها بر اساس اندازه آن‌ها:

$$\bar{x}_{1,1} = M_{1,1} \qquad (۱۳)$$

میانگین وزنی اندازه دانه در توزیع چگالی به وسیلهٔ سطح دانه‌ها، $q_2(x)$ ، به وسیلهٔ رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\bar{x}_{1,2} = M_{1,2} \qquad (۱۴)$$

میانگین وزنی اندازه دانه‌ها در توزیع چگالی بر اساس حجم دانه‌ها، $q_3(x)$ ، به وسیلهٔ رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\bar{x}_{1,3} = M_{1,3} \qquad (۱۵)$$

۴-۲-۴ میانگین هندسی اندازه دانه ها

اگر توزیع دانه‌بندی یک نمونه بطور کامل مطابق با توزیع لگاریتمی نرمال دانه بندی باشد، میانگین هندسی اندازه دانه‌ها مقدار میانگین لگاریتم x را بیان خواهد کرد. مقدار میانه توزی لگاریتمی نرمال، مقدار مشابهی با اندازه میانگین هندسی دارد.

در حالیکه میانگین حسابی از مجموع n مقدار تقسیم بر تعداد n آن ها محاسبه می شود، میانگین هندسی ریشه nام حاصل ضرب n مقدار است. در تعریف لگاریتمی، لگاریتم میانگین هندسی به وسیلهٔ تقسیم مجموع لگاریتم های n مقدار بر تعداد n آن ها محاسبه می‌شود. میانگین حسابی بزرگتر از میانگین هندسی است و این اختلاف با افزایش پراکندگی بین دو مقدار، افزایش می‌یابد.

با تحلیل حد ریاضی معادلهٔ (۶) وقتی که k به سمت صفر میل می‌کند، میانگین هندسی اندازه مطابق با معادله ۱۶به دست می‌آید.

$$\bar{x}_{0,r} = e^{\int_{x_{max}}^{x_{min}} \ln x q_r(x)\,dx} = \bar{x}_{geo,r} \qquad (۱۶)$$

یا در شکل لگاریتمی، به معادله (۱۷) حاصل می شود:

$$\ln \bar{x}_{0,r} = \ln \bar{x}_{geo,r} = \int_{x_{min}}^{x_{min}} \ln x q_r(x)\,dx \qquad (۱۷)$$

و بر اساس اطلاعات استخراجی از یک نمودار می توان به میانگین هندسی وزنی دانه ها از نوع r رسید:

$$\bar{x}_{0,r} = \exp\left(\sum_{i=1}^{m} \ln \bar{x}_i \bar{q}_{r,i} \Delta x_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{m} \ln \bar{x}_i \Delta Q_{r,i}\right) = \bar{x}_{geo,r} \qquad (۱۸)$$

۴-۲-۵ میانگین همساز[2] اندازه دانه ها

میانگین همساز یک سری مقادیر برابر با عکس میانگین حسابی معکوس آن‌ها است. میانگین همساز کوچکتر از میانگین هندسی است و این اختلاف با بزرگتر شدن پراکندگی بین مقادیر افزایش می یابد. بنابراین میانگین همسازی وزنی اندازه دانه از نوع r می‌تواند از معادلهٔ (۱۹) محاسبه شود:

$$\bar{x}_{har,r} = \frac{1}{\int_{x_{max}}^{x_{min}} \frac{1}{x} q_r(x)\,dx} = \frac{1}{M_{-1,r}} \qquad (۱۹)$$

یا بر اساس اطلات استخراجی از یک نمودار:

$$\bar{x}_{har,r} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\bar{x}_i} \bar{q}_{r,i} \Delta x_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\bar{x}_i} \Delta Q_{r,i}} \qquad (۲۰)$$

[2] Harmonic

۴-۳ محاسبه مقادیر گشتاورها و میانگین اندازه دانه‌ها از روی یک توزیع ارائه شده

۴-۳-۱ محاسبه $M_{k,r}$ و میانگین اندازه دانه‌ها از روی یک توزیع بر اساس تعداد و یا حجم دانه‌ها

در بسیاری از موارد عملی، داده های اندازه‌گیری شده به یکی از دو صورت توزیع چگالی عددی $q_0(x)$ و یا توزیع چگالی حجمی ارائه می‌شود. محاسبات اندازه میانگین دانه‌ها که تا بحال توضیح داده شده است، می توان مطابق رابطه (۲۱) بهینه نمود:

$$\bar{x}_{k,r} = \sqrt[k]{M_{k,r}} = \sqrt[k]{\frac{M_{k+r,0}}{M_{r,0}}} = \sqrt[k]{\frac{M_{k+r-3,3}}{M_{r-3,3}}} \qquad (۲۱)$$

از این رابطه می توان به روابط زیر رسید:

$$\bar{x}_{2,0} = \sqrt{M_{2,0}} = \sqrt{\frac{M_{-1,3}}{M_{-3,3}}} \qquad (۲۲)$$

$$\bar{x}_{3,0} = \sqrt[3]{M_{3,0}} = \sqrt[3]{\frac{1}{M_{-3,3}}} \qquad (۲۳)$$

$$\bar{x}_{1,1} = M_{1,1} = \frac{M_{2,0}}{M_{1,0}} = \frac{M_{-1,3}}{M_{-2,3}} \qquad (۲۴)$$

$$\bar{x}_{1,2} = M_{1,2} = \frac{M_{3,0}}{M_{2,0}} = \frac{1}{M_{-1,3}} \qquad (۲۵)$$

$$\bar{x}_{1,3} = M_{1,3} = \frac{M_{4,0}}{M_{3,0}} \qquad (۲۶)$$

از روابط (۲۱) تا (۲۶) نتیجه‌گیری می شود که برای محاسبه اندازه های میانگین دانه‌ها که در بالا به آن‌ها اشاره شده است، گشتاورهای زیر مورد نیاز هستند:

در صورت استفاده از یک توزیع چگالی عددی $q_0(x)$: $M_{1,0}$؛ $M_{2,0}$؛ $M_{3,0}$؛ $M_{4,0}$

در صورت استفاده از یک توزیع چگالی حجمی $q_3(x)$: $M_{1,3}$؛ $M_{-1,3}$؛ $M_{-2,3}$؛ $M_{-3,3}$

رابطه (۲۱) نشان می‌دهد که هر یک از میانگین اندازه دانه‌ها و یا گشتاورهای حاصل، می تواند بصورت نسبی دو گشتاور عددی تعریف شود که به عنوان رویکرد اصلی در روش گشتاور-نسبی-نشانه گذاری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۴-۳-۲ محاسبه $M_{k,r}$ از روی هیستوگرام[3] توزیع دانه بندی

اگر توزیع دانه بندی بصورت یک نمودار در اختیار باشد، عبارت $q_r(x_{i-1}, x_i)$ در بازه اندازه $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ یک عبارت ثابت خواهد بود.

[3] Histogram

در این صورت رابطه (۱) می تواند بصورت زیر بازنویسی شود:

$$M_{k,r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^k q_r(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^k \bar{q}_{r,i} \Delta x_i \qquad (۲۷)$$

$$\bar{q}_{r,i} = \frac{\Delta Q_{r,i}}{x_i - x_{i-1}} \qquad (۲۸)$$

$$M_{k,r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^k q_r(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^k \Delta Q_{r,i} \qquad (۲۹)$$

میانگین تقریبی $\bar{x}_i^k$ در یک رده اندازه خاص را می‌توان به صورت یک میانگین حسابی در هر رده اندازه مطابق رابطه زیر محاسبه نمود:

$$\bar{x}_i^k = \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)^k \qquad (۳۰)$$

میانگین‌های تقریبی جایگزین، مانند میانگین هندسی یا یک میانگین جدایی ناپذیر، مزیت خاصی ندارند. تحقیق و بررسی های مختلفی نشان می دهند که هیچ برتری کلی بین انواع توزیع های مختلف وجود ندارد.

طبیعت گسسته داده های استخراجی از نمودارها، باعث ایجاد عدم قطعیت هایی در حد چند در صد در گشتاورها و اندازه‌های میانگین محاسبه شده می‌شود که مقدار آن به پهنای رده اندازه دانه‌ها و عدم قطعیت مطابق با مقدار دانه‌های بدست آمده از اندازه میانگین تخمین زده شده در هر رده، بستگی دارد. روش‌های افزایش درستی اندازه گیری ها، با در نظر گرفتن رده های اندازه بندی بیشتر در استاندارد ۳-۸۲۰۱ ارائه شده است.

گشتاورهای $M_{1,0}$، $M_{2,0}$، $M_{3,0}$، $M_{4,0}$، $M_{1,3}$، $M_{-1,3}$، $M_{-2,3}$ و $M_{-3,3}$ می توانند از روابط (۳۱) تا (۳۸) بدست آیند:

$$M_{1,0} = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^1 \bar{q}_{0,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^1 \Delta Q_{0,i} \qquad (۳۱)$$

$$M_{2,0} = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^2 \bar{q}_{0,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^2 \Delta Q_{0,i} \qquad (۳۲)$$

$$M_{3,0} = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^3 \bar{q}_{0,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^3 \Delta Q_{0,i} \qquad (۳۳)$$

$$M_{4,0} = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^4 \bar{q}_{0,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^4 \Delta Q_{0,i} \qquad (۳۴)$$

$$M_{1,3} = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^1 \bar{q}_{3,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i^1 \Delta Q_{3,i} \qquad (۳۵)$$

$$M_{-1,3} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\bar{x}_i^1} \bar{q}_{3,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\bar{x}_i^1} \Delta Q_{3,i} \qquad (۳۶)$$

$$M_{-2,3} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\overline{x}_i^2} \overline{q}_{3,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\overline{x}_i^2} \Delta Q_{3,i} \qquad (۳۷)$$

$$M_{-3,3} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\overline{x}_i^3} \overline{q}_{3,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\overline{x}_i^3} \Delta Q_{3,i} \qquad (۳۸)$$

۴-۴ واریانس و انحراف استاندارد توزیع دانه بندی

گستردگی دانه بندی می تواند توسط واریانس آن بیان شود. این مقدار بصورت مجذور انحراف استاندارد بیان می شود. واریانس s_r^2 برای توزیع $q_r(x)$بصورت زیر بیان می‌شود:

$$s_r^2 = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - \overline{x}_{1,r}) q_r(x) dx \qquad (۳۹)$$

با تعریف متغیر جدیدی به نام گشتاور کامل، واریانس می‌تواند بصورت زیر محاسبه شود:

$$s_r^2 = m_{2,r} = M_{2,r} - (M_{1,r})^2 \qquad (۴۰)$$

یا بر اساس اطلاعات استخراجی از نمودار:

$$s_r^2 = \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i^2 \overline{q}_{r,i} \Delta x_i - (\sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i^1 \overline{q}_{r,i} \Delta x_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i^2 \Delta Q_{r,i} - (\sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i^1 \Delta Q_{r,i})^2 \qquad (۴۱)$$

یک مثال عددی برای محاسبه s_r^2در پیوست الف ارائه شده است.

برای یک توزیع لگاریتمی نرمال $q_r(x)$، انحراف استاندارد s می تواند از رابطه زیر محاسبه شود:

$$s = \ln(x_{84,r} / x_{50,r}) = \ln(x_{50,r} / x_{16,r}) \qquad (۴۲)$$

انحراف استاندارد هندسی s_g از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$s_g = \exp(s) \qquad (۴۳)$$

بنابراین

$$s_g = x_{84,r} / x_{50,r} = x_{50,r} / x_{16,r} \qquad (۴۴)$$

۵-۴ محاسبه گشتاورها و میانگین اندازه دانه‌ها از روی یک توزیع لگاریتمی نرمال

گشتاور کامل kام توزیع احتمالی لگاریتمی نرمال $q_r(x)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$M_{k,r} = x_{50,r}^k e^{0.5k^2 s^2} = e^{k \ln x_{50,r} + 0.5k^2 s^2} \qquad (۴۵)$$

یک سری از اندازه های میانگین دانه‌ها را می توان از ریشه kام گشتاور kام در رابطه ۴۵ و یا از میانه (و میانگین هندسی) $x_{50,r}$ و انحراف استاندارد توزیع در رابطه (۴۶) بدست آورد:

$$\overline{x}_{k,r} = x_{50,r} e^{0.5k s^2} = e^{\ln x_{50,r} + 0.5k s^2} \qquad (۴۶)$$

میانه $x_{50,r}$ از توزیع لگاریتمی نرمال، مقدار مشابهی با اندازه میانگین هندسی $\bar{x}_{0,r}$ خواهد داشت.

۶-۴ محاسبه سطح ویژه حجم و قطر میانگین ساتر

از روی توزیع دانه بندی با هر مقدار گشتاوری می‌توان برای محاسبه سطح ویژه حجم S_V استفاده کرد. S_V با میانگین اندازه سطح وزنی دانه ها رابطه معکوس داشته و قطر میانگین ساتر $\bar{x}_{1,2}$ از رابطه (۱۴) محاسبه می‌شود.

$$S_V = \frac{6}{\bar{x}_{1,2}} \qquad (۴۷)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۲۵):

$$S_V = \frac{6}{M_{1,2}} = 6\frac{M_{2,0}}{M_{3,0}} = 6.M_{-1,3} \qquad (۴۸)$$

برای دانه های با شکل غیر کروی، ضریب شکل باید محاسبه شود.

۵ گشتاور-نسبی-نشانه گذاری

گشتاورها اساس تعریف مقادیر اندازه میانگین دانه‌ها و انحراف استاندارد توزیع دانه‌بندی می‌باشند. یک نمونه تصادفی، شامل تعداد محدودی از یک جامعه بزرگ دانه‌ها دانه‌ای است که برای تخمین گشتاور کل جامعه مورد استفاده قرار می‌گیرد. این تخمین با بررسی مقادیر عددی بدست آمده برای آن نمونه انجام می‌گیرد. اندازه‌گیری ها همیشه بر روی نمونه های گسسته انجام می‌گیرد و شامل تعدادی رده اندازه‌بندی گسسته می‌باشد. بنابراین، فقط گشتاورهای مرتبط با نمونه‌ها از این قسمت استاندارد بدست می‌آیند.

۵-۱ تعریف گشتاورها بر اساس روش گشتاور-نسبی-نشانه گذاری

دو نوع گشتاور متفاوت به نام‌های، گشتاورها و گشتاورهای مرکزی می توانند مورد استفاده قرار گیرند. گشتاورها بر حول مبدا محورهای مختصات دانه‌ها بوده ولی گشتاورهای مرکزی برحول میانگین حسابی اندازه دانه‌ها می باشد.

گشتاور p ام یک نمونه که بصورت M_p نمایش داده می شود، بصورت زیر محاسبه می شود:

$$M_p = N^{-1}\sum_i n_i D_i^p \qquad (۴۹)$$

که:

$N = \sum_i n_i$ تعداد کل دانه‌ها اندازه‌گیری شده

D_i میانه رده اندازه i ام (توضیحات رابطه (۳۰) را مشاهده کنید)

n_i تعداد دانه های رده اندازه i ام

گشتاور نخست، میانگین (حسابی) نمونه M_1 از اندازه دانه‌ها D، که بیشتر بصورت $\overline{D}$ نمایش داده می‌شود، می‌باشد. گشتاورهای دوم و سوم به ترتیب با مساحت سطح متوسط و حجم متوسط دانه‌های نمونه متناسب می‌باشد.

گشتاور مرکزی p ام حول اندازه $\overline{D}$، که بصورت m_p نمایش داده می‌شود، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$m_p = N^{-1}\sum_i n_i(D_i - \overline{D})^p \qquad (۵۰)$$

گشتاور مرکزی دانه‌های با اندازه D، به تفاضل های اندازه میانگین بستگی دارد. بهترین مثال برای این قضیه، واریانس نمونه m_2 می باشد.

۵-۲ تعریف میانگین اندازه دانه‌ها بر اساس گشتاور-نسبی-نشانه گذاری

اندازه متوسط $\overline{D}_{p,q}$ برای نمونه‌ای از مواد دانه‌ای با توان $\frac{1}{(p-q)}$ نسبی گشتاور p ام به گشتاور q ام توزیع چگالی نمونه دانه‌ای برابر است.

$$\overline{D}_{p,q} = \left(\frac{M_p}{M_q}\right)^{1/(p-q)} \quad \text{if} \quad p \neq q \qquad (۵۱)$$

با استفاده از رابطه (۴۹)، رابطه (۵۱) بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\overline{D}_{p,q} = \left(\frac{\sum_i n_i D_i^p}{\sum_i n_i D_i^q}\right)^{1/(p-q)} \quad \text{if} \quad p \neq q \qquad (۵۲)$$

برای مقادیر مساوی p و q رابطه به شکل زیر خواهد بود:

$$\overline{D}_{p,p} = \exp\left(\frac{\sum_i n_i D_i^p \ln D_i}{\sum_i n_i D_i^p}\right) \qquad (۵۳)$$

توان های p و q می‌توانند هر مقدار عددی داشته باشند. نوع اندازه میانگین در نظر گرفته شده بایستی یک رابطه علت و معلولی با ویژگی های فیزیکی نمونه مربوطه داشته باشد.

۵-۲-۱ اصطلاح شناسی اندازه میانگین دانه ها در روش گشتاور-نسبی-نشانه گذاری $\overline{D}_{p,q}$

در جدول ۲، اصطلاح شناسی روش M-R آورده شده است.

جدول ۲- اصطلاح شناسی اندازه متوسط دانه ها $\overline{D}_{p,q}$

کد سیستماتیک	اصطلاح شناسی
$\overline{D}_{-3,0}$	میانگین همساز حسابی اندازه حجم دانه‌ها
$\overline{D}_{-2,1}$	میانگین همساز وزنی حجم دانه‌ها بر اساس اندازه آن‌ها
$\overline{D}_{-1,2}$	میانگین همساز وزنی حجم دانه‌ها بر اساس سطح آن‌ها
$\overline{D}_{-2,0}$	میانگین همساز حسابی اندازه سطح دانه‌ها
$\overline{D}_{-1,1}$	میانگین همساز وزنی سطح دانه‌ها بر اساس اندازه آن‌ها
$\overline{D}_{-1,0}$	میانگین همساز حسابی
$\overline{D}_{0,0}$	میانگین حسابی هندسی
$\overline{D}_{1,1}$	میانگین هندسی وزنی بر اساس اندازه دانه‌ها
$\overline{D}_{2,2}$	میانگین هندسی وزنی بر اساس سطح دانه‌ها
$\overline{D}_{3,3}$	میانگین هندسی وزنی بر اساس حجم دانه‌ها
$\overline{D}_{1,0}$	میانگین حسابی
$\overline{D}_{2,1}$	میانگن وزنی بر اساس اندازه دانه‌ها
$\overline{D}_{3,2}$	میانگن وزنی بر اساس سطح دانه‌ها ، قطر میانگین ساتر
$\overline{D}_{4,3}$	میانگین وزنی بر اساس حجم دانه‌ها
$\overline{D}_{2,0}$	میانگین حسابی سطح دانه‌ها
$\overline{D}_{3,1}$	میانگین وزنی سطح دانه‌ها بر اساس اندازه آن‌ها
$\overline{D}_{4,2}$	میانگین وزنی سطح دانه‌ها بر اساس سطح آن‌ها
$\overline{D}_{5,3}$	میانگین وزنی سطح دانه‌ها بر اساس حجم آن‌ها
$\overline{D}_{3,0}$	میانگین حسابی حجم دانه‌ها
$\overline{D}_{4,1}$	میانگین وزنی حجم دانه‌ها بر اساس اندازه آن‌ها
$\overline{D}_{5,2}$	میانگین وزنی حجم دانه‌ها بر اساس سطح آن‌ها
$\overline{D}_{6,3}$	میانگین وزنی حجم دانه‌ها بر اساس حجم آن‌ها

۵-۲-۲ میانگین هندسی اندازه‌های دانه

جدول ۲ نشان می‌دهد که متغیرهای $\overline{D}_{p,p}$ میانگین هندسی اندازه دانه‌ها هستند. به عنوان مثال می‌توان میانگین هندسی قطر سطح را بیان کرد که بصورت $\overline{D}_{2,2}$ نمایش داده می‌شود و برای درجه‌بندی چشمی تصاویر حباب‌های هوا مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۵-۲-۳ میانگین همساز اندازه‌های دانه

طبق جدول ۲، متغیرهای $\overline{D}_{p,q}$ که دارای مقدار منفی برای p می‌باشند، نشان دهنده مقادیر میانگین همساز می باشند.

۵-۳ محاسبه اندازه میانگین دانه‌ها با استفاده از یک توزیع دانه‌بندی

اندازه متوسط $\overline{D}_{p,q}$ را می توان از هر توزیع اندازه $q_r(D)$ با استفاده از روابط مشابه (۵۲) و (۵۳) بدست آورد:

$$\overline{D}_{p,q} = \left(\frac{\sum_{i}^{m} q_r(D_i) D_i^{p-r}}{\sum_{i}^{m} q_r(D_i) D_i^{q-r}}\right)^{1/(p-q)} \quad \text{if} \quad p \neq q \qquad (۵۴)$$

$$\overline{D}_{p,p} = \left(\frac{\sum_{i}^{m} q_r(D_i) D_i^{p-r} \ln D_i}{\sum_{i}^{m} q_r(D_i) D_i^{p-r}}\right)^{1/(p-q)} \quad \text{if} \quad p = q \qquad (۵۵)$$

که در آن:

$q_r(D_i)$ مقدار دانه‌ها در رده اندازه i ام

D_i میانه بازه رده اندازه i ام

r برابر است با مقادیری همچون صفر، ۲،۱ و ۳، نشان دهنده نوع کمیت یعنی به ترتیب تعداد، قطر، سطح و حجم می باشد.

m تعداد رده‌های اندازه می باشد.

نرمال کردن کمیت $q_r(D_i)$ ضروری نیست. این کمیت می تواند حتی در صورتیکه $\sum q_r(D_i) = 1$ باشد نرمال شود. روابط (۵۴) و (۵۵) در صورتیکه $r = 0$ و $n_i = q_0(D_i)$ باشد به صورت روابط (۵۲) و (۵۳) ساده می شوند. طبیعت گسسته داده های استخراجی از نمودارهای دانه بندی، باعث ایجاد عدم قطعیت هایی تا چند درصد در محاسبه گشتاورها و قطرهای متوسطی می‌شود که مربوط به پهنای رده اندازه‌ها و عدم قطعیت‌های مربوط به مقادیر بدست آمده از تخمین میانگین اندازه‌ها در هر رده اندازه‌ای می‌باشد.

۴-۵ واریانس و انحراف استاندارد یک دانه‌بندی

گشتاور مرکزی m_2، که به عنوان توزیع چگالی بر حسب تعداد $(r = 0)$ شناخته می‌شود، بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$m_2 = N^{-1} \sum_i n_i (D_i - \overline{D}_{1,0})^2 \qquad (۵۶)$$

از آنجایی که m_2 تخمین کوچکتری برای σ^2 (مجذور انحراف استاندارد) جامعه دانه‌ها بدست می‌دهد، بنابراین برای رسیدن به انحراف استاندارد واقعی (صحیح تر)، مقدار m_2 در عبارت $N/(N-1)$ ضرب می‌شود. بنابراین، واریانس s_0^2 برای نمونه دانه‌ها از رابطه (۵۷) محاسبه می‌شود:

$$s_0^2 = \frac{N}{N-1} m_2 = \frac{\sum_i n_i (D_i - \overline{D}_{1,0})^2}{N-1} \qquad (۵۷)$$

و انحراف استاندارد s_0 از رابطه (۵۸) بدست می‌آید:

$$s_0 = \sqrt{\frac{\sum_i n_i D_i^2 - N \overline{D}_{1,0}^2}{N-1}} \qquad (۵۸)$$

فرمول (۵۸) می‌تواند بصورت زیر بازنویسی شود:

$$s_0 = c \sqrt{\overline{D}_{2,0}^2 - \overline{D}_{1,0}^2} \qquad (۵۹)$$

$$c = \sqrt{N/(N-1)} \qquad (۶۰)$$

در عمل اگر $N \succ\succ 100$ در آن صورت $c \approx 1$ و:

$$s_0 = \sqrt{\overline{D}_{2,0}^2 - \overline{D}_{1,0}^2} \qquad (۶۱)$$

در رابطه (۶۱) برای بدست آوردن توزیع چگالی بر حسب تعداد $r = 0$ در نظر گرفته شده است. در حالت کلی برای هر نوع توزیع چگالی $q_r(D)$، انحراف استاندارد s_r می تواند توسط رابطه (۶۲) محاسبه شود.

$$s_r = \sqrt{\overline{D}_{2+r,r}^2 - \overline{D}_{1+r,r}^2} \qquad (۶۲)$$

مثال عددی برای محاسبه s_r^2 در پیوست ب ارائه شده است.

انحراف استاندارد جامعه σ برای توزیع لگاریتمی نرمال دانه ها، می تواند توسط انحراف استاندارد s نمونه بدست آید:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i n_i \{\ln(D_i / \overline{D}_{0,0})\}^2}{N-1}} \qquad (۶۳)$$

توجه شود در این مورد σ و s انحراف استاندارد لگاریتم تبدیل یافته اندازه D دانه‌ها می‌باشد.

مشابه رابطه (۶۲)، برای هر توزیع چگالی لگاریتمی نرمال $q_r(D)$، انحراف استاندارد s می‌تواند از رابطه (۶۴) بدست آید، گرچه s غیراریبی نیست:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i n_i D_i^r \{\ln(D_i / \overline{D}_{r,r}\}^2}{\sum_i n_i D_i^r}} \qquad (۶۴)$$

در تحلیل اندازه دانه‌ها، کمیت s_g:

$$s_g = \exp(s) \qquad (۶۵)$$

گاهی به عنوان انحراف استاندارد هندسی در نظر گرفته می‌شود در حالیکه به معنای واقعی انحراف استاندارد نیست.

۵-۵ روابط بین میانگین اندازه‌های دانه

می توان نشان داد که:

$$\overline{D}_{p,0} \le \overline{D}_{m,0} \qquad \text{if} \qquad p \le m \qquad (۶۶)$$

و

$$\overline{D}_{p-1,q-1} \le \overline{D}_{p,q} \qquad (۶۷)$$

با افزایش یکنواختی بین اندازه دانه‌ها D تفاوت بین اندازه‌های میانگین دانه‌ها کاهش می یابد. علامت مساوی زمانی قابل اعمال است که تمام دانه‌ها اندازه مشابهی داشته باشند.

برای میانگین اندازه‌های مختلف دانه‌ها می‌توان رابطه جایگرین به شکل زیر را معرفی نمود:

$$\left[\overline{D}_{p,q}\right]^{p-q} = \overline{D}_{p,0}^{\,p} / \overline{D}_{q,0}^{\,q} \qquad (۶۸)$$

به عنوان مثال، وقتی $p = 3$ و $q = 2$ باشد:

$$\left[\overline{D}_{3,2}\right] = \overline{D}_{3,0}^{\,3} / \overline{D}_{2,0}^{\,2}$$

رابطه (۶۹) یک رابطه ساده متقارن را نشان می‌دهد:

$$\overline{D}_{p,q} = \overline{D}_{q,p} \qquad (۶۹)$$

مجموع دو کمیت p و q که با O نشان داده می‌شود، مرتبه اندازه میانگین $\overline{D}_{p,q}$ نامیده می‌شود:

$$O = p + q \qquad (۷۰)$$

برای توزیع لگاریتمی نرمال دانه بندی، بین میانگین دانه‌ها، رابطه زیر قابل اعمال می‌باشد:

$$\overline{D}_{p,q} = \overline{D}_{0,0} \exp\left[(p+q)s^2/2\right] \qquad (۷۱)$$

در صورتیکه مقدار انحراف استاندارد $s = 0.7$، مرتبه $O(= p + q)$ برای $\overline{D}_{p,q}$ برابر ۶ و اندازه نمونه $N = 180$ باشد و یا اگر $s = 1.0$، $O = 10$ و $N = 1450$ باشد، درستی رابطه ۷۱ برابر با ٪۲ خواهد بود. مقادیر کوچکتر برای انحراف استاندارد s، مرتبه پایین‌تر برای O و مقادیر بزرگتر برای اندازه نمونه N باعث ایجاد درستی بیشتری در محاسبات برای $\overline{D}_{p,q}$ خواهد بود.

رابطه ۷۱ نشان می‌دهد که برای توزیع اندازه با لوگ نرمال، مقادیر میانگین برای اندازه‌هایی با مقادیر یکسان برای مرتبه O، مساوی خواهند بود. با استفاده از رابطه (۷۱) رابطه (۷۲) به دست می‌آید:

$$\overline{D}_{p,q} = \overline{D}_{3,3} \exp\left[(p + q - 6)s^2 / 2\right] \qquad (۷۲)$$

۶-۵ محاسبه سطح مخصوص حجمی و قطر میانگین ساتر

سطح مخصوص حجمی S_V با قطر میانگین وزنی بر اساس سطح، $\overline{D}_{3,2}$،(که قطر میانگین ساتر نیز نامیده می‌شود) نسبت معکوس دارد. این مقدار از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$S_V = \frac{6}{\overline{D}_{3,2}} \qquad (۷۳)$$

۶ رابطه بین گشتاور-نشانه گذاری و گشتاور-نسبی-نشانه گذاری

در برخی از سطح مقطع‌های مورد استفاده، روش گشتاور-نشانه گذاری ترجیح داده می شود درحالیکه در برخی دیگر روش گشتاور-نسبی-نشانه گذاری مورد استفاده قرار می‌گیرد. هر دو روش از نظر واژگان و علایم مورد استفاده متفاوت هستند ولی از روش های محاسباتی یکسانی استفاده می‌نمایند. مابین دو اندازه میانگین $\overline{x}_{k,r}$ و $\overline{D}_{p,q}$ از دو روش یاد شده، رابطه (۷۴) برقرار است:

$$\overline{D}_{p,q} = \overline{D}_{k+r,r} = \overline{x}_{k,r} \quad \text{if} \quad q = r \quad \text{and} \quad p = k + r \qquad (۷۴)$$

با برقرار کردن شرط $k = 0$ می‌توان اندازه میانگین هندسی $\overline{x}_{0,r}$ را تعریف کرد.

به عنوان یک مثال برای رابطه (۷۴)، می توان اندازه میانگین دانه را بیان کرد که با مساحت سطح مخصوص حجمی و قطر میانگین ساتر ارتباط دارد: $\overline{D}_{3,2} = \overline{x}_{1,2}$

$$\overline{D}_{3,2} = \left(\frac{\sum_i n_i D_i^3}{\sum_i n_i D_i^2}\right)^{1/(3-2)} = \overline{x}_{1,2} = M_{1,2} = \frac{M_{3,0}}{M_{2,0}} = \frac{1}{M_{-1,3}} \qquad (۷۵)$$

مقادیر ثبت شده برای توزیع چگالی بر حسب تعداد، بهترین تطابق را برای مقادیر ثبت شده برای هر دو روش در حالتی که $q = r = 0$ و $p = k + 0$ باشد را نشان می دهد:

$$\overline{D}_{p,q} = \left(\frac{\sum_i n_i D_i^p}{\sum_i n_i D_i^q}\right)^{1/(p-q)} \qquad (۴۹)$$

$$\bar{x}_{k,r} = \sqrt[k]{M_{k,r}} = \sqrt[k]{\frac{M_{k+r,0}}{M_{r,0}}} \qquad (۶۱)$$

$$\overline{D}_{1,0} = \bar{x}_{1,0} = M_{1,0} \qquad (۸)$$

$$\overline{D}_{2,0} = \bar{x}_{2,0} = \sqrt[2]{M_{2,0}} \qquad (۹)$$

$$\overline{D}_{3,0} = \bar{x}_{3,0} = \sqrt[3]{M_{3,0}} \qquad (۱۰)$$

$$\overline{D}_{2,1} = \bar{x}_{1,1} = M_{1,1} = \frac{M_{2,0}}{M_{1,0}} = \frac{M_{-1,3}}{M_{-2,3}} \qquad (۲۴)$$

$$\overline{D}_{4,3} = \bar{x}_{1,3} = M_{1,3} = \frac{M_{4,0}}{M_{3,0}} \qquad (۲۶)$$

جدول ۳ کدهای سیستماتیک آورده شده در بخش ها ۵-۲-۱ و ۴-۲-۱ به ترتیب مربوط به روش‌های گشتاور-نشانه گذاری و گشتاور-نسبی-نشانه گذاری را مقایسه می‌کند:

جدول ۳- اصطلاح شناسی میانگین اندازه‌های دانه و کدهای مرتبط با سیستم‌های علامت گذاری

کدهای سیستاتیک گشتاور-نسبی-نشانه گذاری	اصطلاح شناسی	کدهای سیستماتیک گشتاور-نشانه گذاری
$\overline{D}_{-3,0}$	میانگین حجم همساز حسابی	$\bar{x}_{-3,0}$
$\overline{D}_{-2,1}$	میانگین وزنی همساز حجم بر اساس اندازه	$\bar{x}_{-3,1}$
$\overline{D}_{-1,2}$	میانگین وزنی همساز حجم بر اساس سطح	$\bar{x}_{-3,2}$
$\overline{D}_{-2,0}$	میانگین سطح همساز حسابی	$\bar{x}_{-2,0}$
$\overline{D}_{-1,1}$	میانگین وزنی همساز سطح بر اساس اندازه	$\bar{x}_{-2,1}$
$\overline{D}_{-1,0}$	میانگین همساز حسابی اندازه	$\bar{x}_{har,0}(\bar{x}_{-1,0})$
$\overline{D}_{0,0}$	میانگین هندسی حسابی اندازه	$\bar{x}_{geo,0}(\bar{x}_{0,0})$
$\overline{D}_{1,1}$	میانگین وزنی هندسی بر اساس اندازه	$\bar{x}_{0,1}$
$\overline{D}_{2,2}$	میانگین وزنی هندسی بر اساس سطح	$\bar{x}_{0,2}$
$\overline{D}_{3,3}$	میانگین وزنی هندسی بر اساس حجم	$\bar{x}_{0,3}$
$\overline{D}_{1,0}$	میانگین حسابی	$\bar{x}_{1,0}$

جدول ۳- کدهای سیستماتیک مورد استفاده برای هر دو روش گشتاور-نشانه گذاری و گشتاور-نسبی-نشانه گذاری (ادامه)

$\overline{D}_{2,1}$	میانگین وزنی بر اساس اندازه	$\overline{x}_{1,1}$
$\overline{D}_{3,2}$	میانگین وزنی بر اساس سطح، قطر میانگین ساتر	$\overline{x}_{1,2}$
$\overline{D}_{4,3}$	میانگین وزنی بر اساس حجم	$\overline{x}_{1,3}$
$\overline{D}_{2,0}$	میانگین حسابی سطح	$\overline{x}_{2,0}$
$\overline{D}_{3,1}$	میانگین وزنی سطح بر اساس اندازه	$\overline{x}_{2,1}$
$\overline{D}_{4,2}$	میانگین وزنی سطح بر اساس سطح	$\overline{x}_{2,2}$
$\overline{D}_{5,3}$	میانگین وزنی سطح بر اساس حجم	$\overline{x}_{2,3}$
$\overline{D}_{3,0}$	میانگین حسابی حجم	$\overline{x}_{3,0}$
$\overline{D}_{4,1}$	میانگین وزنی حجم بر اساس اندازه	$\overline{x}_{3,1}$
$\overline{D}_{5,2}$	میانگین وزنی حجم بر اساس سطح	$\overline{x}_{3,2}$
$\overline{D}_{6,3}$	میانگین وزنی حجم بر اساس حجم	$\overline{x}_{3,3}$

۷ درستی محاسبات متغیرهای توزیع اندازه‌های دانه

اگر محاسبه و بررسی توزیع اندازه دانه‌ها از روش های مختلفی انجام پذیرد، هر یک از موارد زیر می تواند باعث تفاوت فاحش بین مقادیر مربوط به مشخصات بدست آمده و توزیع اندازه دانه‌ها باشد.

به عنوان مثال هنگام مقایسه نتایج بدست آمده از روش‌های مختلف، تبدیل توزیع اندازه دانه‌ها، همچون تبدیل اندازه‌های میانگین و یا درصدهای توزیع دانه‌ها بدست آمده از یک نوع روش اندازه‌گیری به انواع دیگر (به عنوان مثال، تبدیل از روش توزیع بر اساس حجم به روش توزیع بر اساس تعداد)، امری ضروری است. از نظر مسائل ریاضی، این تبدیل‌ها می‌تواند با درستی حدود ٪۱ انجام گیرد. گرچه موارد زیر می‌توانند باعث افزایش بسیار خطاها در محاسبه متغیرها شود:

- اغلب در مورد مسائلی با دقت محدود و یا مسائل نه چندان پیچیده، اگر توزیع دانه بندی با مقطع هایی در هر دو انتها به طول های کوچکی تبدیل شود (r/r ۰/۳ — ٪۰/۰۵)، اعمال می شود.
- اگر توزیع اندازه ها فقط شامل بخشی از دانه‌ها با اندازه‌های بزرگتر باشد، که در این صورت کمیت ها دارای عدم قطعیت بزرگتری خواهد بود.
- اگر توزیع اندازه، بدلیل وجود مواد ناهمگن در نمونه دانه‌ها و یا بدلیل استفاده از مدل‌های نادرست در تبدیل علایم اندازه‌گیری شده به توزیع دانه بندی، دارای نقاط پیک کاذب باشد.
- اگر نوع توزیع اندازه دانه ها (ابعاد r) در تبدیل پهنای توزیع اندازه دانه‌ها، دارای تغییرات قابل توجهی باشد؛ (تبدیل حجم به سطح خطاهای کمتری نسبت به تبدیل حجم به تعداد دارد)
- اگر توزیع دانه بندی فقط شامل تعدادی از رده‌های عریض اندازه‌ها باشد.
- اگر خطاهای اندازه‌گیری قابل توجهی وجود داشته باشند.

توضیحات و مثال های بیشتر در پیوست پ ارائه شده است.

پیوست الف

(اطلاعاتی)

مثال عددی برای محاسبه میانگین اندازه‌های دانه و انحراف استاندارد از روی هیستوگرام دانه‌بندی بر اساس حجم

توزیع حجم تجمعی در مثال عددی زیر، مطابق با یک توزیع لگاریتمی نرمال می‌باشد:

$$q_3(x) = \frac{1}{xs\sqrt{2\pi}} \exp\left[-0.5\left(\frac{\ln(x/\bar{x}_{0,3})}{s}\right)^2\right] \qquad \text{(الف-۱)}$$

که در این رابطه $\bar{x}_{0,3}$ میانگین هندسی قطر توزیع حجم و s انحراف استاندارد آن (اندازه لگاریتمی تبدیل یافته دانه‌ها) می‌باشد. در این مورد مقدار $\bar{x}_{0,3}$ با مقدار میانه $\bar{x}_{50,3}$ برابر می‌باشد. انحراف استاندارد هندسی s_g برابر است با:

$$s_g = \exp(s) \qquad \text{(الف-۲)}$$

مقادیر مندرج در جدول الف-۱ با فرض اینکه در توزیع حجمی، مقدار میانگین هندسی قطر $\bar{x}_{0,3} = 5.0\,\mu m$، انحراف استاندارد $s = 0.50$ و انحراف استاندارد هندسی $s_g = 1.648$ مدنظر باشد، محاسبه شده اند. برای راحتی کار فرض شده است که رده اندازه دانه‌ها از رده های R5 و R10 تبعیت می‌کنند. (در عمل تعداد رده ها بزرگتر از مقادیر فرض شده است)

$$\text{R5:}\quad \frac{x_i}{x_{i-1}} = \sqrt[5]{10} = 1.585 \qquad \text{R10:}\quad \frac{x_i}{x_{i-1}} = \sqrt[10]{10} = 1.259 \qquad \text{(الف-۳)}$$

کران بالایی توزیع را $25\,\mu m$ فرض می‌شود. مقدار کسر حجمی کوتاه شده بالای این بازه، ۰/۰۰۰۶۴ می‌باشد. همچنین در بازه پایین‌تر از رده هفتم سری R5 نمودار توزیع برابر با $0.99527\ \mu m$ کوتاه شده است. مقدار کسر حجمی کاهش یافته در زیر این بازه برابر با ۰/۰۰۰۶۲ می‌باشد. بنابراین کسر حجمی کوتاه شده کل برابر با ۰/۰۰۱۲۶ خواهد بود.

اعداد جدول الف-۱ برای x_i؛ $Q_{3,i}$؛ Δx_i؛ $\Delta_{3,i}$؛ $\Delta Q_{3,i}$ (نرمال شده) و $\bar{q}_{3,i}$ (سری R5) برای محاسبه گشتاورهای ارائه شده در روابط (۳۵) تا (۳۸) مورد استفاده قرار گرفته‌اند. دقت شود که مقادیر Q_3 بدلیل کوتاه سازی نمودار توزیع، نرمال شده نیستند. از یک تابع نرم افزار اکسل به نام LOGNORMDIST (x,mean,standard_dev) برای محاسبه مقادیر $Q_{3,i}$ استفاده شده است.

$$Q_{3,i} = LOGNORMDIS\ T(x_i, \ln(\bar{x}_{0,3}), s) = LOGNORMDIS\ T(x_i; 1.60944; 0.5) \qquad \text{(الف-۴)}$$

مقدار تحلیلی گشتاورها با در نظرگرفتن توزیع لگاریتمی نرمال در رابطه (۱) و انتگرال‌گیری در بازه $x_{\min} = 0$ تا $x_{\max} = \infty$ (بدون کوتاه سازی توزیع) محاسبه می‌شود. مقادیر بدست آمده در جدول الف-۲ ارائه شده‌اند. ستون ۲ مقادیر چهار گشتاور محاسبه شده از توابع تحلیلی را نشان می‌دهد. ستون های ۳ و ۵ مقادیر بدست آمده از محاسبات عددی با استفاده از سری‌های R5 و R10 را نشان می‌دهد. مقادیر نرمال شده $\Delta Q_{3,i}$ از جدول الف-۱ باید برای محاسبه مقادیر ستون‌های ۳ و ۵ مورد استفاده قرار گیرند. مقادیر محاسبه شده، مطابق انحراف‌هایی که در ستون‌های ۴ و ۶ داده شده است، تا حدودی با مقادیر داده در ستون ۱ متفاوت هستند.

جدول الف-۳، مقادیر میانگین اندازه دانه‌ها را که با استفاده از روابط (۲۲) تا (۲۶) و گشتاورهای مندرج در جدول الف-۲ محاسبه شده اند، ارائه می‌دهد. انحراف s_3^2 برای توزیع حجم را می‌توان با در نظر گرفتن داده‌های مندرج در ستون‌های ۱ و ۵ جدول الف-۱ و مطابق رابطه (۴۳) بدست آورد. مقادیر میانه رده‌های اندازه‌ای، مقادیر میانگین دو بازه رده‌های پی در پی هستند که در ستون ۱ جدول الف-۱ نشان داده شده‌اند. مقدار s_3^2 برابر است با ۱۰/۰۸۱ و مقدار انحراف استاندارد s_3 برابر خواهد بود با ۳/۱۷۵.

جدول الف-۱ داده های اساسی توزیع لوگ نرمال برای محاسبه گشتاورها (سری R5)

$x_i(\mu m)$	$Q_{3,i}$	$\Delta x_i(\mu m)$	$\Delta Q_{3,i}$	$\Delta Q_{3,i}$ **(نرمال شده)**	$\Delta \overline{q}_{3,i}(\mu m^{-1})$
۲۵	۰/۹۹۹۴	۹/۲۲۶	۰/۰۱۰۱۴	۰/۰۱۰۱۵	۰/۰۰۱۱۰
۱۵/۷۷۴	۰/۹۸۹۲	۵/۸۲۱	۰/۰۷۳۵۰	۰/۰۷۳۵۹	۰/۰۱۲۶۴
۹/۹۵۳	۰/۹۱۵۷	۳/۶۷۳	۰/۲۴۰۰۰	۰/۲۴۰۲۹	۰/۰۶۵۴۲
۶/۲۸۰	۰/۶۷۵۷	۲/۳۱۷	۰/۳۵۴۸۵	۰/۳۳۵۳۰	۰/۱۵۳۳۱
۳/۹۶۲	۰/۳۲۰۹	۱/۴۶۲	۰/۲۳۸۰۴	۰/۲۳۸۳۵	۰/۱۶۳۰۰
۲/۵۰۰	۰/۰۸۲۸	۰/۹۲۳	۰/۰۷۲۳۱	۰/۰۷۲۴۰	۰/۰۷۸۴۸
۱/۵۷۷	۰/۰۱۰۵	۰/۵۸۲	۰/۰۰۹۹۰	۰/۰۰۹۹۱	۰/۰۱۷۰۲
۰/۹۹۵	۰/۰۰۰۶				

جدول الف-۲ مقایسه مقادیر گشتاور حاصل از محاسبات تحلیلی و عددی

	نتایج تحلیلی	**سری R5**	**انحراف R5 (٪)**	**سری R10**	**انحراف R10 (٪)**
$M_{1,3}(\mu m)$	۵/۶۶۶	۵/۸۵۴	۳/۳	۵/۷۰۳	۰/۷
$M_{-1,3}(\mu m^{-1})$	۰/۲۲۶۶	۰/۲۲۲۲	-۲/۰	۰/۲۲۵	-۰/۶
$M_{-2,3}(\mu m^{-2})$	۰/۰۶۵۹	۰/۰۶۳۹	-۳/۱	۰/۰۶۴۹	-۱/۷
$M_{-3,3}(\mu m^{-3})$	۰/۰۲۴۶	۰/۰۲۳۴	-۵/۱	۰/۰۲۳۶	-۴/۳

جدول الف-۳ مقایسه مقادیر میانگین اندازه‌های دانه حاصل از محاسبات تحلیلی و عددی

	نتایج تحلیلی	سری R5	انحراف R5 (٪)	سری R10	انحراف R10 (٪)
$\bar{x}_{1,0}(\mu m)$	۲٫۶۷۶	۲٫۷۳۱	۲٫۱	۲٫۷۵۱	۲٫۸
$\bar{x}_{2,0}(\mu m)$	۳٫۰۳۳	۳٫۰۸۲	۱٫۶	۳٫۰۹۰	۱٫۹
$\bar{x}_{3,0}(\mu m)$	۳٫۴۳۶	۳٫۴۹۶	۱٫۷	۳٫۴۸۷	۱٫۵
$\bar{x}_{1,1}(\mu m)$	۳٫۴۳۶	۳٫۴۷۷	۱٫۲	۳٫۴۷۲	۱٫۰
$\bar{x}_{1,2}(\mu m)$	۴٫۴۱۲	۴٫۵۰۱	۲٫۰	۴٫۴۴۱	۰٫۷
$\bar{x}_{1,3}(\mu m)$	۵٫۶۶۶	۵٫۸۵۴	۳٫۳	۵٫۷۰۳	۰٫۷

تفاوت بین نتایج تحلیلی و عددی برای سری‌های R5 و R10، که در جدول الف-۳ ارائه شده است، ناچیز هستند. اصولا سری‌های R10، بدلیل مقادیر کوچک تر انحراف‌ها، نسبت به سری‌های R5 ترجیح داده می‌شوند (خصوصا مقادیر $\bar{x}_{1,3}$ و $\bar{x}_{1,2}$ ملاحظه شوند). این مسئله نشان می‌دهد که سری‌هایی با اندازه های باریک‌تر مثل R10 نسبت به سری‌هایی با اندازه‌های پهن‌تر مثل R5 ، ترجیح داده می‌شوند، گرچه تفاوت چندان زیادی بین اندازه‌های آن‌ها وجود ندارد.

پیوست ب

(اطلاعاتی)

مثال عددی برای محاسبه میانگین اندزه‌های دانه و انحراف استاندارد از روی هیستوگرام دانه‌بندی بر اساس حجم

توزیع حجم تجمعی در مثال عددی زیر، مطابق با یک توزیع لگاریتمی نرمال می‌باشد:

$$q_3(D) = \frac{1}{Ds\sqrt{2\pi}} \exp\left[-0.5\left(\frac{\ln(D/\overline{D}_{3,3})}{s}\right)^2\right] \qquad (ب-۱)$$

که در این رابطه $\overline{D}_{3,3}$ میانگین وزنی هندسی قطر بر اساس حجم برای توزیع حجم و s انحراف استاندارد آن (اندازه لگاریتمی تبدیل یافته دانه ها) می‌باشد. انحراف استاندارد هندسی s_g برابر است با:

$$s_g = \exp(s) \qquad (ب-۲)$$

مقادیر مندرج در جدول ب-۱ با فرض اینکه در توزیع حجمی، مقدار میانگین هندسی قطر $\overline{D}_{3,3} = 5.0\,\mu m$، انحراف استاندارد $s = 0.50$ و انحراف استاندارد هندسی $s_g = 1.648$ مدنظر باشد، محاسبه شده‌اند. برای راحتی کار فرض شده است که بازه رده‌های اندازه پی در پی از رده‌های R5 و R10 تبعیت می‌کنند. (در عمل تعداد رده ها بزرگتر از مقادیر فرض شده است)

$$\text{R5:}\quad \frac{x_i}{x_{i-1}} = \sqrt[5]{10} = 1.585 \qquad \text{R10:}\quad \frac{x_i}{x_{i-1}} = \sqrt[10]{10} = 1.259 \qquad (ب-۳)$$

کران بالایی توزیع را $25\,\mu m$ فرض می‌شود. مقدار کسر حجمی کوتاه شده بالای این بازه، ۰/۰۰۰۶۴ می‌باشد. همچنین در بازه پایین‌تر از رده هفتم سری R5 نمودار توزیع برابر با $0.99527\ \mu m$ کوتاه شده است. مقدار کسر حجمی کاهش یافته در زیر این بازه برابر با ۰/۰۰۰۶۲ می باشد. بنابراین کسر حجمی کوتاه شده کل برابر با ۰/۰۰۱۲۶ خواهد بود. از یک تابع نرم افزار اکسل به نام LOGNORMDIST (D,mean,standard_dev) برای محاسبه مقادیر تجمعی کاهش حجم $\sum_i n_i D_i^3$ در ستون ۴ جدول ب-۱ استفاده شده است.

$$\sum_i n_i D_i^3 = LOGNORMDIS\ T(Dup_i, \ln(\overline{D}_{3,3}), s) = LOGNORMDIS\ T(Dup_i; 1.60944; 0.5) \qquad (ب-۴)$$

که در این رابطه Dup_i کران بالایی رده اندازه i ام می باشد (ستون ۳ را ملاحظه نمایید). در جدول ب-۱، برای جلوگیری هرگونه شبهه‌ای، برای بازه رده های اندازه‌ای از نمادهایی با تفاوت جزئی استفاده شده است. داده‌های جدول ب-۱ برای محاسبه داده‌های جدول ب-۲ مورد استفاده قرار می‌گیرند و با استفاده از این مقادیر، که براساس توزیع های نرمال شده نیستند، با استفاده از روابط (۵۲) و (۵۳)، اندازه متوسط دانه ها محاسبه می‌شوند. از آنجایی‌که توزیع حجمی با لوگ نرمال می باشد، مقدار تحلیلی هر یک از مقادیر اندازه میانگین دانه‌ها برای توزیع مورد نظر، می تواند با استفاده از مقادیر داده شده در بالا برای $\overline{D}_{3,3}$ و s و همچنین رابطه (۷۲) بدست آید.

جدول ب-۳ اندازه‌های متوسط دانه‌ها را نشان می‌دهد. تفاوت بین نتایج تحلیلی و نتایج حاصل از استفاده سری های R10 و R5 کوچک هستند. در واقع استفاده از سری هاس R10 نسبت به استفاده از سری های R5 بدلیل انحراف‌های کمتر ارجح هستند، بخصوص به مقادیر $\overline{D}_{3,2}$ و $\overline{D}_{4,3}$ توجه کنید.

جدول ب-۱ توزیع حجم لوگ نرمال (سری R5)

شماره رده	میانه $D_i(\mu m)$	دامنه اندازه (μm)	کاهش تجمعی $\sum_i n_i D_i^3$	کاهش $n_i D_i^3$
۱	۱٫۲۸۶	۱٫۵۷۷-<۰٫۹۹۵	۲٫۰۱۰۵۲	۰٫۰۰۹۹۰
۲	۲٫۰۳۹	۲٫۵۰۰-<۰٫۵۷۷	۰٫۰۸۲۸۳	۰٫۰۷۲۳۱
۳	۳٫۲۳۱	۳٫۹۶۲-<۲٫۵۰۰	۰٫۳۲۰۸۷	۰٫۲۳۸۰۴
۴	۵٫۱۲۱	۶٫۲۸۰-<۳٫۹۶۲	۰٫۶۷۵۷۲	۰٫۳۵۴۸۵
۵	۸٫۱۱۶	۹٫۹۵۳-<۶٫۲۸۰	۰٫۹۱۵۷۱	۰٫۲۳۹۹۹
۶	۱۲٫۸۶۳	۱۵٫۷۷۴-<۹٫۹۵۳	۰٫۹۸۹۲۱	۰٫۰۷۳۵۰
۷	۲۰٫۳۸۷	۲۵٫۰۰۰-<۱۵٫۷۷۴	۰٫۹۹۹۳۶	۰٫۰۱۰۱۴

جدول ب-۲ داده‌های مرتبط با محاسبه برخی اندازه‌های میانگین توزیع دانه‌بندی را با استفاده از روابط (۵۲) و (۵۳) ارائه داده است.

جدول ب-۲ داده های مورد نیاز برای محاسبه برخی از اندازه های میانگین و انحراف استاندارد هندسی

میانه $D_i(\mu m)$	کاهش $n_i D_i^3$	n_i $(\times 100)$	$n_i \ln D_i$ $(\times 100)$	$n_i D_i$ $(\times 100)$	$n_i D_i^2$ $(\times 100)$	$n_i D_i^3 \ln D_i$ $(\times 100)$	$n_i D_i^4$ $(\times 100)$	$n_i(\ln(D_i / \overline{D}_{3,3}))^2$ $(\times 100)$
۱٫۲۸۶	۰٫۰۰۹۹۰	۰٫۴۶۴۹	۰٫۱۱۷۱	۰٫۵۹۸۹	۰٫۷۶۹۳	۰٫۲۴۹۲	۱٫۲۷۲۹	۱٫۸۹۵۲
۲٫۰۳۹	۰٫۰۷۲۳۱	۰٫۸۵۳۴	۰٫۶۰۷۹	۱٫۷۳۹۸	۳٫۵۴۶۹	۵٫۱۵۰۷	۱۴٫۷۴۱۹	۶٫۱۶۵۳
۳٫۲۳۱	۰٫۲۳۸۰۴	۰٫۷۰۵۷	۰٫۸۲۷۶	۲٫۲۸۰۱	۷٫۳۶۷۲	۲۷٫۹۱۸۵	۷۶٫۹۱۴۸	۵٫۰۹۹۷
۵٫۱۲۱	۰٫۳۵۴۸۵	۰٫۲۶۴۲	۰٫۴۳۱۶	۱٫۳۵۳۱	۶٫۹۲۹۴	۵۷٫۹۵۹۴	۱۸۱٫۷۱۸۴	۰٫۰۰۰۲
۸٫۱۱۶	۰٫۲۳۹۹۹	۰٫۰۴۴۹	۰٫۰۹۴۰	۰٫۳۶۴۳	۲٫۹۵۶۹	۵۰٫۲۵۰۷	۱۹۴٫۷۸۱۰	۵٫۰۳۸۱
۱۲٫۸۶۳	۰٫۰۷۳۵۰	۰٫۰۰۳۵	۰٫۰۰۸۸	۰٫۰۴۴۴	۰٫۵۷۱۴	۱۸٫۷۷۴۸	۹۴٫۵۴۵۹	۶٫۲۰۳۵
۲۰٫۳۸۷	۰٫۰۱۰۱۴	۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۴	۰٫۰۰۲۴	۰٫۰۴۹۷	۳٫۰۵۷۷	۲۰٫۶۷۶۳	۱٫۹۲۹۲
جمع	۰٫۹۹۸۷۳	۰٫۳۳۶۷	۲٫۰۸۷۳	۶٫۳۸۲۳	۲۲٫۱۹۰۹	۱۶۳٫۳۶۱۰	۵۸۴٫۶۵۱۲	۲۶٫۳۳۱۲

با استفاده از مقادیر مجموع سطر پایینی جدول ب-۲، برآوردهای عددی برای اندازه‌های متوسط و انحراف استاندارد بدست می‌آیند:

ستون های ۵ و ۳ و رابطه ۵۲ را ملاحظه شود. $\overline{D}_{1,0}$ = ۶٫۳۸۲۳ ÷ ۲٫۳۳۶۷ =۲٫۷۳۱

ستون های ۶ و ۳ و رابطه ۵۲ را ملاحظه شود. $\overline{D}_{2,0}=(۶/۳۸۲۳ \div ۲/۳۳۶۷)^{۱/۲}=۳/۰۸۲$

ستون های ۲ و ۳ و رابطه ۵۲ را ملاحظه شود. $\overline{D}_{3,0}=(۹۹/۸۷۳ \div ۲/۳۳۶۷)^{۱/۳}=۳/۴۹۶$

ستون های ۶ و ۵ و رابطه ۵۲ را ملاحظه شود. $\overline{D}_{2,1}=۲۲/۱۹۰۹ \div ۶/۳۸۳۲=۳/۴۷۷$

ستون های ۲ و ۶ و رابطه ۵۲ را ملاحظه شود. $\overline{D}_{3,2}=۹۹/۸۷۳ \div ۲۲/۱۹۰۹=۴/۵۰۱$

ستون های ۸ و ۲ و رابطه ۵۲ را ملاحظه شود. $\overline{D}_{4,3}=۵۸۴/۶۵۱۲ \div ۹۹/۸۷۳=۵/۸۵۴$

ستون های ۴ و ۳ و رابطه ۵۳ را ملاحظه شود. $\overline{D}_{0,0}=\exp(۲۲/۱۹۰۹ \div ۶/۳۸۳۲)=۳/۴۷۷$

ستون های ۷ و ۳ و رابطه ۵۳ را ملاحظه شود. $\overline{D}_{3,3}=\exp(۱۶۳/۳۶۱ \div ۹۹/۸۷۳)=۵/۱۳۳$

$$s_g = \exp(s) = \exp(\sqrt{26.3312 / (099873 \times 100)}) = \exp(0.51374) = 1.6711$$

با بررسی ستون های ۹ و ۲ و روابط (۶۴) و (۶۵)، همچنین فرض می شود نمونه مورد نظر بزرگ باشد، یعنی N>>100

$$s_0 = \sqrt{3.082^2 - 2.731^2} = 1.427$$

مقادیر $\overline{D}_{1,0}$ و $\overline{D}_{2,0}$ را بالای رابطه (۶۱) ملاحظه می شود، همچنین فرض می شود نمونه مورد نظر بزرگ باشد، یعنی N>>100. برای محاسبه انحراف معیار استاندارد s_3 توزیع حجم، مطابق رابطه (۶۲)، نیاز به مقادیر $\overline{D}_{5,3}$ و $\overline{D}_{4,3}$ است که به ترتیب برابر با ۶/۶۶۰ (در بالا محاسبه نشده) و ۵/۸۵۴ (محاسبه شده در بالا) می باشد. با استفاده از این مقادیر، s_3 برابر با ۳/۱۷۶ و واریانس s_3^2 برابر با ۱۰/۰۸۶ می شود.

اندازه متوسط هندسی $\overline{D}_{0,0}$ نیز می تواند از مقادیر $\overline{D}_{3,3}$ = ۵/۱۳۳ و لگاریتم انحراف استاندارد هندسی s_g : $\ln(s_g) = s = \ln(1.6711) = 0.5135$، با استفاده از رابطه (۷۲)، بصورت زیر محاسبه شود:

$$\overline{D}_{0,0} = 5.133 \times \exp((0+0-6) \times 0.5135^2 / 2) = 2.327$$

این مقدار انحرافی حدود ٪۵ از مقدار محاسبه شده $\overline{D}_{0,0}$ توسط رابطه ۵۳، یعنی ۲/۴۴۳، دارد اما انحراف آن از مقدار تحلیلی اش برابر با ٪۱/۵- می باشد. یک مقایسه ای بین مقادیر تخمینی و مقادیر بدست آمده تحلیلی در جدول ب-۳ ارائه شده است.

جدول ب-۳ مقایسه مقادیر میانگین اندازه $\overline{D}_{p,q}$ تخمینی و تحلیلی و انحراف استاندارد هندسی s_g (سری‌های R5 و R10)

نوع اندازه متوسط و انحراف استاندارد هندسی	نتایج تحلیلی (μm)	مقادیر تخمینی سری R5 (μm)	انحراف سری R5 (٪) (μm)	مقادیر تخمینی سری R۱۰ (μm)	انحراف سری R۱۰ (٪) (μm)
$\overline{D}_{1,0}$	۲٫۶۷۶	۲٫۷۳۱	۲٫۰۶	۲٫۷۵۱	۲٫۷۷
$\overline{D}_{2,0}$	۳٫۰۳۳	۳٫۰۸۲	۱٫۶۲	۳٫۰۹۰	۱٫۹۰
$\overline{D}_{3,0}$	۳٫۴۳۶	۳٫۴۹۶	۱٫۷۴	۳٫۴۸۷	۱٫۴۸
$\overline{D}_{2,1}$	۳٫۴۳۶	۳٫۴۷۷	۱٫۱۸	۳٫۴۷۲	۱٫۰۳
$\overline{D}_{3,2}$	۴٫۴۱۲	۴٫۵۰۱	۲٫۰۰	۴٫۴۴۱	۰٫۶۵
$\overline{D}_{4,3}$	۵٫۶۶۶	۵٫۸۵۴	۳٫۳۲	۵٫۷۰۳	۰٫۶۶
$\overline{D}_{0,0}$	۲٫۳۶۲	۲٫۴۴۳	۳٫۴۴	۲٫۴۶۶	۴٫۴۴
$\overline{D}_{3,3}$	۵٫۰۰۰	۵٫۱۳۳	۲٫۶۶	۵٫۰۳۳	۰٫۶۶
s_g	۱٫۶۴۸۷	۱٫۵۸۳۷	-۳٫۹۴	۱٫۵۷۹۰	-۴٫۲۳

اختلاف بین مقادیر تحلیلی و مقادیر محاسبه شده از طریق سری‌های R5 وR10 که در جدول ب-۳ ارائه شده است، ناچیز هستند. اصولا سری‌هایR10، بدلیل مقادیر کوچک‌تر انحراف ها، نسبت به سری های R5 ترجیح داده می شوند (خصوصا مقادیر $\overline{D}_{3,2}$، $\overline{D}_{3,3}$ و $\overline{D}_{4,3}$ را ملاحظه نمایید). این مسئله نشان می‌دهد که سری‌هایی با اندازه-های باریک‌تر مثل R10 نسبت به سری‌هایی با اندازه‌های پهن‌تر مثل R5، ترجیح داده می‌شوند، گرچه تفاوت چنان زیادی بین اندازه‌های آن‌ها وجود ندارد.

پیوست پ

(اطلاعاتی)

درستی پارامترهای محاسبه شده دانه بندی

پهنای توزیع دانه‌بندی بدین جهت مهم است که توزیع های عریض باعث تغییرات بزرگتری از یک نوع به نوع دیگر می‌شوند. به عنوان مثال، برای اندازه میانه توزیع لگاریتمی نرمال، استاندارد ۵-۱۱۶۱۷ رابطه زیر را پیشنهاد می دهد:

$$\ln(D_{50,3}) = \ln(D_{50,2}) + s^2 = \ln(D_{50,1}) + 2s^2 = \ln(D_{50,0}) + 3s^2 \qquad (پ-۱)$$

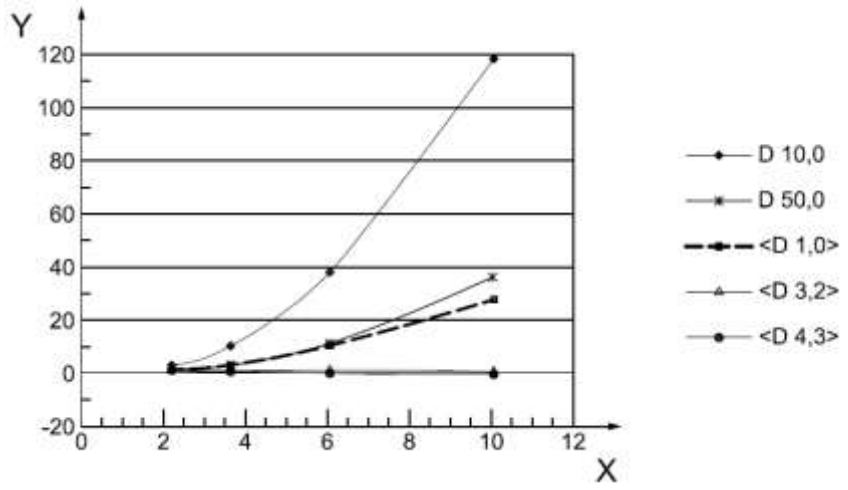
که در آن:

$s_g = \ln(s_g)$ انحراف استاندارد توزیع لگاریتمی نرمال و s_g انحراف استاندارد هندسی توزیع لگاریتمی نرمال می باشد.

رابطه (پ-۱)، مشابه روابطی که برای تعیین سایر مشخصات متغیرهای اندازه توزیع در نظر گرفته می‌شود، نشان می‌دهد که با عریض‌تر شدن توزیع، تغییرات (به عنوان مثال از $\overline{D}_{50,3}$ به $\overline{D}_{50,0}$) بزرگ تر می‌شوند (دلیل داشتن S بزرگتر). برای توزیع‌های عریض دانه‌بندی بر اساس حجم، می‌توان محاسبه کرد که مقاطع کوچک حجمی با اندازه‌های پایین‌تر نمودار دانه‌بندی، تعداد قابل توجهی دانه را شامل می شود. به عنوان مثال، در یک توزیع دانه‌بندی لگاریتمی نرمال که S=۰/۷ (مطابق با $\overline{D}_{90,3} / \overline{D}_{10,3} = 6.0$) و مقدار ۰/۰۵٪ برای v/v در انتهای دانه‌های با اندازه کوچک، مطابق با ۱۲٪ n/n می‌باشد. بنابراین، برای مقطعی با v/v برابر با ۰/۰۵٪ ، دارای افتی برابر با ۱۲٪ از کوچکترین دانه‌ها خواهد داشت. بطور مشابه، برای توزیع‌های عریض دانه‌بندی بر اساس تعداد، یک مقدار کمی از تعداد دانه‌ها در کران بالایی اندازه دانه‌ها با مقطع قابل توجه حجمی ارتباط دارند.

وقتی در توزیع دانه‌بندی تعداد کمی از رده‌های اندازه‌ای عریض موجود باشند، عرض رده اندازه‌ای اهمیت پیدا می‌کنند، چرا که یک رده عریض‌تر نشان می‌دهد که مقدار بزرگتری از دانه‌ها اندازه متوسط مشابهی دارند. بنابراین، این مسئله یک عدم قطعیت بزرگتری را در تبدیل اندازه دانه‌ها از یک نوع به نوع دیگر بیان می‌کند. به عنوان مثال، داده‌های R5 در پیوست‌های الف و ب اریبی حدود ۴٪ را نشان می‌دهند.

به عنوان یک مثال، شکل پ-۱ برخی متغیرهای توزیع دانه‌بندی را نشان می‌دهد که برای یک توزیع دانه‌بندی لگاریتمی نرمال محاسبه شده که در پهناهای متفاوت توزیع دانه‌بندی، حدودا $\overline{D}_{50,3} = 5\,\mu m$ می‌باشد. توزیع تئوری، با یک نسبت v/v برابر با ۰/۰۵٪ در هر دو انتهای آن، کوتاه شده است. پهنای رده اندازه دانه‌ها مطابق با سری R20 می‌باشد که نسبت گام بر اندازه رده آن برابر با ۱/۱۲۲ = $10^{1/2}$ می‌باشد.



X عرض توزیع، $\overline{D}_{90,3} / \overline{D}_{10,3}$

Y انحراف %

شکل پ-۱ تاثیر پهنای عملی دانه بندی بر انحراف پارامترهای اندازه محاسبه شده

داده‌های موجود نشان می‌دهند که تبدیل از مقادیر تئوری، بدون قطع توزیع دانه‌بندی، اگر نسبت $\overline{D}_{90,3} / \overline{D}_{10,3}$ کمتر از ۳٫۵ باشد، می‌تواند با انحراف‌های کمتر از ٪۱۰ محاسبه شود. علاوه بر آن شکل پ-۱ نشان می‌دهد که برای مقادیر قرار گرفته در نزدیکی انتهای توزیع اندازه‌گیری شده، با افزایش پهنای توزیع اندازه دانه‌ها، انحراف متغیرهای آن افزایش می‌یابد (در این مورد انتهای پایین اندازه‌های توزیع بر مبنای حجم مورد نظر است). همچنین، این قضیه به روشنی نشان می‌دهد که متغیرهای عملی توزیع اندازه دانه‌ها که مقادیری در میانه توزیع اندازه‌گیری شده دارند، همچون $D_{4,3}$ و $D_{3,2}$، انحرافی کوچک‌تر از ٪۱ دارند. توجه شود که تمامی پارامترها برای داشتن اریبی کمتر از ٪۱ و بدون داشتن قطع توزیع دانه‌بندی، محاسبه شده‌اند.

همچنین، تاثیر پهنای رده انداره دانه‌ها، وقتی که سری های R5 با عرض گام $10^{1/5}$=۱٫۸۵۸ مانند فوق در یک توزیع لگاریتمی نرمال مورد استفاده قرار می گیرد، نشان داده شده است. به عنوان مثال، در رده اندازه مربوطه، درون‌یابی خطی منتج به مقداری برابر با ۵٫۱۳۲ μm برای $D_{50,3}$ (با اریب ٪۲٫۶) می‌شود، در حالی‌که درون‌یابی لگاریتمی، مقدار صحیح ۵٫۰ μm را بدست می‌دهد. البته، روش مورد استفاده برای درون‌یابی به آرایش رده‌های اندازه توزیع بستگی دارد.

نتیجه‌گیری می‌شود که با در نظر گرفتن عوامل زیر، درستی مقادیر محاسبه شده اندازه‌های متوسط و متغیرهای اندازه‌ای مربوط به مشخصات آن‌ها به میزان قابل ملاحظه ای کاهش می‌یابد:

- توزیع اندازه دانه بندی ها عریض باشد
- توزیع، قطع شده باشد
- نوع توزیع (از نظر بعد r) بطور قابل ملاحظه ای تغییر یابد.

بنابراین توصیه می‌شود در مواردی که درستی بالایی مورد نیاز است، انحراف‌های بالقوه در حین شبیه‌سازی آن، به عنوان مثال با نرم افزار اکسل، کنترل گردد.

کتابنامه

[1] Leschionski K. Representation and Evaluation of Particle Size Analysis Data. Particle Characterisation. 1984, 1 pp. 59-95.

[2] Stintz M. Representation of Results of Particle Size Analysis – Calculation of Average Particle Sizes/Diameters and Moments from Particle Size distributions. World Congress on Particle Technology 4, 21. 25.07.2002, Sydney, Proceeding, Int. Number 661.

[3] Alderliesten M. Mean Particle Diameters. Part I: Evaluation of Definition Systems. Part. Part. Syst. Charact. 1990, 7 pp. 233–241.

[4] Alderliesten M. Mean Particle Diameters. From Statistical Definition to Physical Understanding. Thesis, Delft University of Technology (2008).

[5] Masuda H., & Iinoya K. Mean Particle Diameter in an Analysis of a Particulate Process. Reprint from the Memoiries of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol. 34, Part 4, Kyoto, 1972

[6] Heywood H. The Scope of Particle Size Analysis and Standardization. The Institution of Chemical Engineers, Symposium on Particle Size Analysis, February 4, 1947. Supplement to Transactions,Institution of Chemical Engineers, Vol. 25, 1947, Pages 14 – 24.

[7] Herdan G. Small Particle Statistics, pages 32, 33, Butterworths, London, 1960

[8] Alderliesten M. Mean Particle Diameters. Part III: An Empirical Evaluation of Integration and Summation Methods for Estimating Mean Particle Diameters from Histogram Data. Part. Part. Syst. Charact. 2002, 19 pp. 373–386

[9] Alderliesten M. Mean Particle Diameters. Part II: Standardization of Nomenclature. Part. Part. Syst. Charact. 1991, 8 pp. 237–241

[10] Mugele R.A., & Evans H.D. Droplet Size Distribution in Sprays. Ind. Eng. Chem. 1951, 43 pp. 1317–1324

[11] Rumpf H ., & E bert K .F. D arstellung v on K ornverteilungen u nd B erechnung d er s pezifischen Oberfläche Chem. lng. Tech. 1964, 36 pp. 523–537

[12] Merkus H . Particle Size Measurements; Fundamentals, Practice, Quality. Particle Technology Series. Springer Netherlands, 2009

[13] ISO 565, Test sieves — Metal wire cloth, perforated metal plate and electroformed sheet Nominal sizes of openings.

[14] ISO 3534-1:2006, Statistics — Vocabulary and symbols — Part 1: General statistical terms and terms used in probability.

[15] ISO 9276-3, Representation of results of particle size analysis — Part 3: Adjustment of an experimental curve to a reference model.